**Сценарій**

**проведення турніру**

**Математичних боїв**

**учнів 8 − 10 класів**

1. **Структура математичного бою**

Математичний бій — змагання двох команд, що полягає в розв’язуванні задач, оповіді власних розв’язків та пошуку й викритті недоліків у розв’язках суперників.

Він складається з двох частин. **Перша частина** − команди отримують умови завдань (6 задач) і 2,5 годин на їх розв’язання. Набір задач однаковий для обох команд та не відомий заздалегідь. При розв’язанні завдань дозволяється використання непрограмованих калькуляторів, але команда не має права використовувати будь-яку літературу, спілкуватися ні з ким, окрім журі. Забороняється використання комп'ютерних, мобільних і подібних пристроїв.

**Друга частина −**  після закінчення виділеного часу починається власне бій, коли команди розповідають розв’язання завдань та опонують один одному.

1. **Склад команди учасників**

Мінімальна кількість учасників, що входять до складу команди − 6. Команда обирає капітана, який виносить остаточну ухвалу щодо кожного питання, має право брати для команди тайм-аути, замінювати доповідача чи опонента, звертатись до журі (інші члени команди звертатись до журі мають за посередництвом капітана). До початку проведення бою капітан повинен надати журі список членів команди.

1. **Склад журі**

Журі складається із учнів 11-их класів. Кількість членів журі − непарна.

1. **Нарахування балів**

У кожному раунді розігрується 12 балів, які розподіляються між доповідачем, опонентом і журі.

* Якщо доповідач безпомилково розв’язав завдання і журі та опонент погодились з цим − команді доповідача нараховуються 12 балів.

Інакше журі знімає з доповідача бали за діри, що містилися в розв’язанні. Вартість кожної діри оцінюється парним числом балів.

* Якщо доповідач заповнив діру після питання опонента, заданого до закінчення доповіді, бали з доповідача не знімаються.
* Якщо доповідач заклав діру після питання опонента, заданого після закінчення доповіді, вартість діри ділиться порівну між опонентом і доповідачем.
* Якщо доповідач не зумів заповнити діру, опонент відразу ж отримує половину її вартості, не заповнюючи діру.
* У разі заповнення дірки опонентом команда опонента отримає її повну вартість.
* Якщо опонент не помітив діри, а журі вказало на неї своїми питаннями після винесення висновку, половину вартості діри отримує журі, а друга половина йде до доповідача, якщо він зумів доповідач заповнити діру.
* Якщо опонент не помітив діри, а журі вказало на неї своїми питаннями після винесення висновку, і доповідач не зумів заповнити діру, то повну вартість діри отримує журі.
* У випадку, коли розв’язок геть неправильний, опонент може показати власний —і заробити всі 12 балів.
* Якщо учасники не знають розв’язку задачі, що його команду викликали розповідати, вони «перевіряють коректність» виклику: відмовляються відряджати доповідача й роблять зворотний виклик — запрошують команду суперників показати розв’язання тієї-таки задачі. Якщо суперники й собі не знають розв’язку, команда, що перевіряла коректність виклику, ділить 12 балів навпіл із журі, і її викликають наново. Інакше суперники відряджають доповідача, а команда, що перевіряє коректність,— опонента.Втім, якщо опонент доведе, що розв’язок суперників загалом неправильний, виклик визнають «некоректним» − команду опонента тоді викликають удруге.

1. **Початок бою**

Початком бою є конкурс капітанів, який дозволяє визначити черговість здійснення викликів. На конкурс капітанів виходять по одному представникові від кожної команди (це не обов'язково має бути капітан, але далі ми називаємо "капітаном" людини, що бере участь в цьому конкурсі). Капітанам пропонується вирішити завдання. Капітан, що першим вирішив запропоноване завдання, піднімає руку і представляє відповідь. Якщо його відповідь правильна, він переміг, якщо неправильний - переміг його суперник, який не зобов'язаний представляти свою відповідь. Коли жоден учасник не піднімає руки протягом хвилини (або іншого проміжку часу, визначеного журі), питання конкурсу змінюють.

Якщо і після цього визначити переможця неможливо, то кидається доля. Команда, що перемогла в конкурсі капітанів, приймає рішення: чи бажає вона в першому раунді викликати команду суперників на доповідь або бути викликаною.

1. **Порядок бою**

Бій складається з декількох раундів. На початку кожного раунду одна з команд викликає іншу команду на одне із завдань, розв’язання яких ще не розповідалися (команда може також відмовитися від подальших викликів). Викликана команда може прийняти виклик або здійснити перевірку коректності

1. **Порядок узгодження виклику**

Команда, що робить виклик, має хвилину, щоб визначитися, як саме вона діятиме. Команда може:

— Викликати суперників на будь-яку із задач, що не обговорювалися досі. В такому разі капітан команди виразно й гучно повідомляє, що його команда викликає суперників, та номер задачі, на яку викликають.

— Взяти десятихвилинну перерву — якщо це дозволяють правила. Якщо так, команда визначає, на яку задачу викликатиме суперників по перерві, записує номер цієї задачі, й передає журі записане. По перерві виклик оголошує журі.

— Відмовитись викликати. Про це теж виразно й гучно має повідомити капітан.

Почувши рішення суперників, команда, яку викликають, може:

— Прийняти виклик. У такому випадку вона відряджає доповідача, суперники − опонента. Команда суперників, якщо бажає, може й не відряджати опонента.

— Перевірити коректність виклику — відмовитись від виклику та з’ясувати, чи розв’язали суперники задачу, на яку викликали. В такому разі команда (якщо бажає) відряджає до дошки опонента, а суперники — доповідача. Про прийняття чи перевірку коректності виклику голосно й розбірливо повідомляє капітан.

— Якщо суперники (щойно чи раніше) відмовилися викликати, команда може відрядити свого представника доповідати одну із задач, що їх досі не було розглянуто — капітан чітко називає номер задачі, а суперники (коли бажають) виставляють опонента.

1. **Прийнятий виклик**

Якщо виклик був прийнятий, викликана команда виставляє доповідача, команда, що викликала, - опонента. Доповідач з дозволу журі може узяти з собою папір з кресленнями і обчисленнями. Але він не має права брати з собою текст розв’язання. Доповідач розповідає розв’язання задачі; опонент, за домовленістю з доповідачем, ставить йому питання або по ходу викладу, або після доповіді. Усі обчислення, як правило, проводяться доповідачем на дошці і без використання калькулятора. На доповідь відводиться не більше 10 хвилин, на наступну дискусію опонента і доповідача - не більше 15 хвилин.

1. **Права доповідача**

Доповідач має право на згоду або відмову на питання опонента під час своєї доповіді. Його виступ вважають завершеним (а розв’язок цілком розказаним), коли доповідач сам це ствердить.

Доповідач може посилатися під час розв’язання на загальновідомі (на думку журі) факти. На прохання опонента доповідач зобов’язаний сформулювати відповідне загальновідоме твердження, але не мусить

його доводити. Під час виступу доповідач може послуговуватися нотатками довільного змісту (розрахунками, кресленнями тощо), але не може брати до дошки текст розв’язання чи окремих його частин. Будь-який матеріал, що доповідач бажає використовувати, він мусить взяти до дошки на початку раунду, спершу продемонструвавши журі. У виняткових випадках, однак, журі може дозволити доповідачу взяти той чи інший запис після тайм-ауту, що взяла його команда.

Під час дискусії доповідач може: попросити опонента уточнити питання; відмовитися відповідати на питання опонента, мотивувавши свою відмову тим, що:

* у нього немає відповіді,
* він вже відповідав на це питання,
* питання, на його думку, не має відношення до завдання.

Доповідач не зобов'язаний порівнювати свій метод рішення з іншими можливими методами.

Після кожного питання чи зауваження опонента або журі доповідач має хвилину, щоб продумати відповідь. Якщо за хвилину доповідач не починає відповідати, вважають, що відповісти він не може.

1. **Права опонента**

Під час доповіді опонент може: ставити питання доповідачеві з його згоди; попросити доповідача повторити будь-яку частину доповіді; дозволити доповідачеві не доводити які-небудь очевидні з точки зору опонента факти.

Під час дискусії опонент може: попросити доповідача повторити будь-яку частину доповіді; попросити доповідача уточнити будь-яке з його висловлювань; попросити доповідача довести сформульоване неочевидне і незагальновідоме твердження (факти, що входять в шкільний курс математики, як правило вважаються загальновідомими).

У разі, якщо опонент має контрприклад до розв’язку, і цей приклад сам по собі є розв’язанням задачі, опонент може про це оголосити, але контрприклад не наводити. Доповідач має хвилину, щоб зреагувати на цю заяву, по якій він втрачає право заробити бали за виправлення тієї частини розв’язку, що про її некоректність свідчить контрприклад (якщо опонент його таки покаже).

Коли питання поставлені і відповіді на них отримані, опонент виносить висновок по одній з трьох форм :

* "Я повністю згоден з розв’язанням";
* " Розв’язання в основному правильне, але в нім є наступні недоліки";
* " Розв’язання неправильне, принципова помилка полягає в наступному.".

Опонентові слід пам'ятати, що журі у результаті оцінює не його питання, а його висновок, який має бути мотивованим! Висновок по неправильному розв’язанні може бути винесено у формі: " Розв’язання неправильне, у мене є контрприклад". В цьому випадку журі просить опонента пред'явити контрприклад письмово, не розкриваючи його доповідачеві. Якщо журі приймає контрприклад, доповідачеві надається хвилина на спробу виправлення розв’язання. Аналогічні дії виконуються за заявою опонента " Розв’язування неповне, розглянуті не усі випадки".

Якщо опонент погодився з розв’язанням, він і його команда в цьому раунді більше не беруть участь; далі питання доповідачеві задає журі. Поки розв’язання доповідача не було спростоване, опонент не має права розповідати своє рішення, навіть якщо воно набагато простіше.

1. **Перевірка коректності**

Перевірка коректності полягає в тому, що викликана команда відмовляється розповідати розв’язання задачі, а замість цього перевіряє, чи розв’язала її команда, що викликала. У такому разі команда, що викликає, виставляє доповідача, а що викликається - опонента. Якщо команда, що викликає, відразу ж призналася, що у неї немає розв’язання, то команда, що викликається, отримує 6 балів. Доповідач і опонент в цьому випадку не призначаються і виходи до дошки не зараховуються. При перевірці коректності зміна ролей вироблятися не може. Якщо при перевірці коректності опонент довів, що у доповідача немає рішення, то він отримує не менше 4 балів.

1. **Порядок чергового виклику при перевірці коректності**

Якщо виклик визнаний коректним (командою було представлено розв’язання, або опонент не зміг довести, що у доповідача немає відповіді), то черговий виклик робить викликана команда. Якщо виклик визнаний некоректним (команда, що викликала, відразу ж призналася, що у неї немає рішення, або опонент зумів довести, що у доповідача немає розв’язування), то черговий виклик знову робить команда, що викликала.

1. **Заміна ролей**

* Якщо опонент показав, що розв’язок команди доповідача є загалом

неправильним, і журі має сумнів, що центральну ідею розв’язку (коли вона специфічна) може бути використано в правильному розв’язанні, опонент може просити цілковитої заміни ролей із доповідачем.

* Якщо опонент цього бажає, він стає доповідачем, а колишній

доповідач − новим опонентом. Попередня дискусія на розподіл балів тепер не впливає — раунд немов розпочинають наново.

* Якщо опонент указав на деякі суттєві недоліки в розв’язкові

суперників, а доповідач не зумів їх усунути, опонент отримує право на часткову заміну ролей. У такому разі він − тепер як доповідач − розповідає, як усунути ті чи ті (а можливо, всі) недоліки, спершу оголосивши, що саме він буде робити.

1. **Відмова від викликів**

Починаючи з деякого раунду, одна з команд може відмовитися від подальших викликів. В цьому випадку суперники можуть виставляти доповідачів на будь-які не розглянуті раніше завдання, а команда, що відмовилася від виклику, виставляє опонентів. Після відмови від викликів зміна ролей вироблятися вже не може.

1. **Тайм-аут**

Спілкування промовця і команди допускається тільки під час узятої командою 30-секундної перерви. Суперники в цей час теж можуть радитися, витрачаючи усі 30 секунд перерви. За бій команда може узяти не більше шести 30-секундних перерв. Якщо опонент приступив до винесення висновків, його команда брати тайм-аут вже не може.

1. **Число виходів до дошки**

Кожному гравцеві дозволено виходити до дошки (як опонент або доповідач) не більше двох разів за бій.

1. **Порядок замін**

Команда у будь-який момент може замінити свого промовця, що рівносильно використанню двох перерв. При заміні вихід зараховується обом учасникам.

1. **Закінчення бою**

Бій закінчується, коли розглянуті усі завдання або коли одна з команд відмовилася від виклику, а інша команда відмовилася розповідати рішення завдань, що залишилися.

1. **Визначення переможця**

Переможцем бою вважають команду, що набрала більше балів. При різниці менше 3 очок бій вважається таким, що закінчився внічию.

1. **Загальні правила поведінки**

Під час бою команда спілкується з журі тільки через капітана; якщо капітан знаходиться у дошки - через його заступника. Доповідач і опонент звертаються один до одного тільки в шанобливій формі, на "ви".

При порушенні цих правил команда спочатку попереджається, а потім карається штрафними балами.

1. **Штрафи та дискваліфікація**

Журі має право накласти штраф (забрати на свою користь бал чи декілька) на команду за некоректну поведінку її учасників. Окремих учасників або цілком одну чи обидві команди журі може дискваліфікувати за некоректну поведінку, порушення правил бою чи нечесну гру. Якщо дискваліфіковано одну команду, іншій присуджують технічну перемогу.

1. **Журі**

Журі є верховним тлумачем правил бою. Рішення журі є обов'язковими для команд. Журі може зняти питання опонента, припинити доповідь або опонування, якщо вони затягуються. Журі веде на дошці протокол бою. Якщо одна з команд не згодна з прийнятим журі рішенням по завданню, вона має право негайно зажадати розбору ситуації за участю старшого вчителя. Після початку наступного раунду рахунок попереднього раунду вже не може бути змінений.

**Математичний бій №1**

***Єдиний спосіб визначити межі можливого - вийти за ці межі, в неможливе.***

***Артур Клар***

**8 клас**

Конкурс капітанів

Якою цифрою закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до 81? (0)

1. Четверо хлопців Альоша, Боря, Ваня і Гриша приймали участь у змаганнях з легкої атлетики. Перед початком забігу кожного із них запитали, яке місце він займе. Альоша відповів: “Я не буду ні першим, ні останнім ”, Боря відповів: “Я не буду останнім ”, Ваня відповів: “А я буду першим!”, а Гриша відповів, що він буде останнім. Відомо, що троє хлопчиків були праві, а один із них помилився. Хто ж був останнім ?
2. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр у вісім разів більший висоти.
3. Числа *a, b* і *с* такі, що значення виразів *a+ b+* *с* і  є цілими числами. Доведіть, що значення виразу  також є цілим числом.
4. Визначте довжину хорди, якщо радіус кола дорівнює *r*, а відстань від одного кінця шуканої хорди до дотичної, проведеної через інший її кінець, дорівнює *а.*
5. В компанії із семи хлопців кожний має серед інших не менш, ніж три хлопця з таким же прізвищем. Доведіть, що всі семеро мають одне і те саме прізвище.
6. Для кожного значення параметра *а* розв’яжіть рівняння



**Математичний бій №1 (**8 клас) розв’язки

1. Четверо хлопців Альоша, Боря, Ваня і Гриша приймали участь у змаганнях з легкої атлетики. Перед початком забігу кожного із них запитали, яке місце він займе. Альоша відповів: “Я не буду ні першим, ні останнім ”, Боря відповів: “Я не буду останнім ”, Ваня відповів: “А я буду першим!”, а Гриша відповів, що він буде останнім. Відомо, що троє хлопчиків були праві, а один із них помилився. Хто ж був останнім ?

Розв’язання. Якщо Альоша помилився, то всі інші праві. Тому Борис може бути 1, 2, 3; Ваня - 1; Гриша –4; Альоша – 1 або 4. Що явно неможливо.

Якщо Борис помилився, то всі інші праві. Тому Альоша може бути 2 або 3; Борис – 4; Ваня – 1; Гриша – 4. Що явно неможливо.

Якщо Ваня помилився, то можлива така ситуація: Альоша – 2 або 3; Борис – 1, 2, 3; Ваня – 2, 3, 4; Гриша –4.

Дана ситуація можлива. Тому Гриша був останнім.

1. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр у вісім разів більший висоти.

Розв’язання. Висота ромба дорівнює *4а/8=а/2.* Тоді гострий кут ромба 30°, відповідно тупий кут 150°.

1. Числа *a, b* і *с* такі, що значення виразів *a+ b+* *с* і  є цілими числами. Доведіть, що значення виразу  також є цілим числом.

Розв’язання. (*a+ b+* *с)2* є цілим числом, тоді цілим є значення виразу

. Отже значення виразу  також є цілим числом.

1. Визначте довжину хорди, якщо радіус кола дорівнює *r*, а відстань від одного кінця шуканої хорди до дотичної, проведеної через інший її кінець, дорівнює *а.*

М

О

А

С

В

*l*

Розв’язання. Нехай АВ − хорда кола радіусом *r*, О − центр цього кола, *l* − дотична, проведена в точці А. З точки О опустимо перпендикуляр ОМ на хорду АВ, з точки В опустимо перпендикуляр ВС на дотичну *l.* Трикутники АМО і ВСА − подібні (оскільки ∠ВСА= = ∠АМО = 90°, а ∠СВА = ∠ОАМ − як внутрішні різносторонні кути при АО ⎪⎢ВС і січній АВ). Тоді   

1. В компанії із семи хлопців кожний має серед інших не менш, ніж три хлопця з таким же прізвищем. Доведіть, що всі семеро мають одне і те саме прізвище.

Розв’язання. Доведемо методом від супротивного. Нехай два хлопчика мають неоднакові прізвища. Тоді кожний з них має серед залишившихся п’яти по три хлопця з однаковими прізвищами. За принципом Діріхле, у них є спільний друг. Отже, обрані хлопці мають однакове прізвище.

1. Для кожного значення параметра *а* розв’яжіть рівняння



Розв’язання. . Знайдемо корені старшого коефіцієнта; .

1. При  маємо: *0 · х = 49;* немає коренів
2. При  маємо: *0 · х = 0; х∈R.*
3. При *а*≠1, *а*≠8 маємо: 

**Математичний бій №2**

***Він став поетом - для математика у нього не вистачало фантазії.***

***Давид Гільберт про одного зі своїх учнів***

**8 клас**

1. У банці літають 3 мухи. Всякий раз, коли мухи зі швидкостями А > 0 і В > 0 стикаються, вони розлітаються з швидкостями (A2+2AB)/(А+В) і B2/( А+В). Чи може через деякий час виявитися, що всі мухи подвоїли свої швидкості? (Від зіткнення до зіткнення муха літає з постійною швидкістю, одночасно 3 мухи зіткнутися не можуть).
2. Відомо, що . Знайдіть значення виразу .
3. До двох кіл радіусів R і r, які дотикаються зовнішньо, провели їх спільні дотичні. Визначте довжину відрізка внутрішньої дотичної, розміщеного між зовнішніми дотичними.
4. Доведіть, що НН1 = Н1НА, де НА − точка перетину продовження висоти АН1 і кола, описаного навколо трикутника АВС.
5. Розв’яжіть нерівність

**Математичний бій №2 (**8клас) розв’язки

1. У банці літають 3 мухи. Всякий раз, коли мухи зі швидкостями А > 0 і В > 0 стикаються, вони розлітаються з швидкостями (A2+2AB)/(А+В) і B2/( А+В). Чи може через деякий час виявитися, що всі мухи подвоїли свої швидкості? (Від зіткнення до зіткнення муха літає з постійною швидкістю, одночасно 3 мухи зіткнутися не можуть).

Розв’язання: Додамо швидкості мух до стикання і після стикання.



Як бачите вони не змінюються. Отже, швидкість в будь-який момент часу не може бути подвоєна.

1. Відомо, що . Знайдіть значення виразу .

Розв’язання: 

1. До двох кіл радіусів R і r, які дотикаються зовнішньо, провели їх спільні дотичні. Визначте довжину відрізка внутрішньої дотичної, розміщеного між зовнішніми дотичними.

Розв’язання.

А

В

С

О1

О2

М

N

D

Маємо MN = 2MD = AM + MB = AB. Проведемо О2С⎪⎢АВ. З трикутника О1СО2

(∠ С =90°):

.

1. Розв’язати рівняння

**

Розв’язання. Оскільки ** і ** ,то рівняння зводиться до системи

*. Звідки х=15.*

1. Доведіть, що НН1 = Н1НА, де НА − точка перетину продовження висоти АН1 і кола, описаного навколо трикутника АВС.

Розв’язання. СН1⊥ННА.

С

А

В

Н

НА

Н1

Н2

1

3

2

Звідки, ∠1=∠3. Оскільки ∠3=∠2 як вписані кути, що спираються на дугу ∪НАВ, то ∠1=∠2. Значить, СН1 − є висотою і бісектрисою трикутника НСНА , отже цей трикутник рівнобедрений і СН1 є його медіаною, тобто НН1 = Н1НА.

1. Розвяжіть нерівність

Розв’язання.

  , *х∈{2,5}∪[3; +∞)*

1)

  , *х∈ (−∞; 2])∪{2,5}*

2)

Відповідь : *(−∞; 2])∪{2,5}∪[3; +∞)*

**Математичний бій №1**

9 клас

***Краще знати зайве, чим нічого не знати.***

***Сенека***

1. Для кожного значення параметра *а* знайдіть кількість розв’язків системи рівнянь



1. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу  кратне 7.
2. До двох кіл радіусів R і r, які дотикаються зовнішньо, провели їх спільні дотичні. Визначте довжину відрізка внутрішньої дотичної, розміщеного між зовнішніми дотичними.
3. У трикутнику АВС проведені медіани АА1 і СС1. Відомо, що ∠АА1С=∠СС1А. Доведіть, що трикутник АВС рівнобедрений.



1. Побудуйте графік рівняння
2. На новорічному вечері у класі кожний хлопчик подарував кожній дівчинці по  цукерці „Білочка”, а кожна дівчинка кожному хлопчику – по одній цукерці „Караван”. Після цього кожний хлопчик з’їв по  з подарованих цукерок, а кожна дівчинка – по  цукерки з тих, що їй щойно подарували. Вийшло так, що дітьми була з’їдена чверть усіх подарованих цукерок. Яка найбільша кількість дітей могла навчатись у цьому класі?

**Математичний бій №1 (**9 клас) розв’язки

1. Для кожного значення параметра *а* знайдіть кількість розв’язків системи рівнянь

Розв’язання. *у = 6 − х* − пряма;  − коло з центром в початку координат і радіусом . Якщо пряма буде дотичною до кола, то система буде мати один розв’язок, при цьому радіус кола дорівнює висоті прямокутного рівнобедреного трикутника з катетами 6 см: *hc=3* Отже, при *а =3*  система має один розв’язок, при *а < 3* − немає розв’язку, при *а > 3* − два розв’язки.

1. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу  кратне 7.

Розв’язання.  Звідки  використовуючи властивості конгруенцій отримаємо:  (\*) . Оскільки  то (\*\*). Тоді додамо (\*) і (\*\*). Маємо: ; значить . Оскільки права частина при діленні на 7 має остачу 0, то і ліва частина має ту саму остачу при діленні на 7.

1. До двох кіл радіусів R і r, які дотикаються зовнішньо, провели їх спільні дотичні. Визначте довжину відрізка внутрішньої дотичної, розміщеного між зовнішніми дотичними.

А

В

С

О1

О2

М

D

N

Розв’язання.

Маємо MN = 2MD = AM + MB = AB. Проведемо О2С⎪⎢АВ. З трикутника О1СО2 (∠ С =90°): СО2=.

1. У трикутнику АВС проведені медіани АА1 і СС1. Відомо, що ∠АА1С=∠СС1А. Доведіть, що трикутник АВС рівнобедрений.

Розв’язання.

А1

А

М

С1

С

В

Нехай медіани АА1 і СС1 перетинаються в точці М. Тоді за двома кутами *Δ* МАС1 і *ΔМ*СА1 подібні. Отже, ∠АС1М= ∠СА1М і . Звідки випливає, що трикутники АС1С і СА1А подібні. Отже ∠ С1АС=

=∠ А1СА. Значить, *ΔАВС −* рівнобедрений.



1. Побудуйте графік рівняння

Розв’язання.

1. Знайдемо контрольні прямі: *у = − 2х* та *у = 2х.*
2. Побудуємо контрольні прямі в системі координат та методом пробних точок визначимо знак підмодульного виразу у кожній частині площини.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Пробна точка | Знак І підмодульного виразу | Знак ІІ підмодульного виразу |
| 1 | (1; 0) | + | + |
| 2 | (0; 1) | + | − |
| 3 | (− 1; 0) | − | − |
| 4 | (0; − 1) | − | + |

1. Розкриваємо знак модуля у кожній частині площини.
2. *2х + у + 2х − у =4; х = 1.*

*у*

*1*

*-1*

*-2*

*2*

*х*

1. *2х + у − 2х + у = 4; у = 2.*
2. *− 2х − у − 2х + у =4; х = − 1.*
3. *− 2х − у + 2х − у =4; у = − 2.*
4. На новорічному вечері у класі кожний хлопчик подарував кожній дівчинці по  цукерці „Білочка”, а кожна дівчинка кожному хлопчику – по одній цукерці „Караван”. Після цього кожний хлопчик з’їв по  з подарованих цукерок, а кожна дівчинка – по  цукерки з тих, що їй щойно подарували. Вийшло так, що дітьми була з’їдена чверть усіх подарованих цукерок. Яка найбільша кількість дітей могла навчатись у цьому класі?

Розв’язання. Нехай у класі хлопчиків , а дівчат – , тоді з умов задачі маємо таку рівність: , з якої маємо таке:  або . Достатньо далі переглянути усі дільники числа  і одержати різні можливі відповіді, серед яких максимальне значення  буде для двох випадків:  або , для кожного з них відповідь буде: .Відповідь: .

**Математичний бій №2**

9 клас

***Він став поетом - для математика у нього не вистачало фантазії.***

***Давид Гільберт***

***про одного зі своїх учнів***

1. Довести, що при довільному натуральному *n* число



кратне числу 900.

1. На діагоналі *АС* ромба *ABCD* взято довільну точку *Р*. Довести, що 
2. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожний, Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 5 кусків і так зробили декілька разів. Чи могло в результаті виконання таких дій отримати 1975 кусків?
3. Відрізок АН − висота гострокутного трикутника АВС. Доведіть, що ∠ВАС=∠ОАС, де точка О − центр описаного кола трикутника АВС.
4. При яких значеннях параметра *а* рівняння має один корінь?



1. Є три купки каменів : в першій - 10, в другій - 15, в третій - 20. За хід можна розбити будь-яку купку на дві менші. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє ?

**Математичний бій №2 (**9 клас) розв’язки

1. Довести, що при довільному натуральному *n* число



кратне числу 900.

Розв’язання.

==

===36. Оскільки,  ділиться на 25, то 36 ділиться на 36·25=900.

1. На діагоналі *АС* ромба *ABCD* взято довільну точку *Р*. Довести, що 

Розв’язання.У ромба діагоналі AC і BD перпендикулярні, тому трикутники AOB i POB – прямокутні. За теоремою Піфагора 

А

В

С

D

O

P

Почленно віднімемо ці рівності



1. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожний, Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 5 кусків і так зробили декілька разів. Чи могло в результаті виконання таких дій одержатись 1975 кусків?

Розв’язання. Інваріантна властивість: кількість кусків після розрізання на п'ять кусків збільшується на чотири. 5+ 4n не рівно1975.

1. Відрізок АН − висота гострокутного трикутника АВС. Доведіть, що ∠ВАС=∠ОАС, де точка О − центр описаного кола трикутника АВС.

Розв’язання. *∠АВС =1/2∪АС* як вписаний кут, *∠АОС=∪АС*. Тоді з трикутника *АОС (АО=ОС):* *∠ОАС* = .

А

В

С

Н

О

З трикутника АВН *(∠Н=90°):* *∠ВАН = 90° − ∪АС.* Звідки *∠ВАС =∠ОАС.*

1. При яких значеннях параметра *а* рівняння має один корінь?



Розв’язання. ; . Звідки рівняння має один корінь при *а<0* та а=*3/2.*

1. Є три купки каменів : в першій - 10, в другій - 15, в третій - 20. За хід можна розбити будь-яку купку на дві менші. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє ?

Розв’язання. Кількість можливих ходів для розкладання купок: 45 - 3 = 42. Тому, як би не ходив перший гравець, при його ході завжди буде парне число купок. При хо­ді другого гравця кількість купок буде завжди непарна. Значить, переможе перший гравець, оскільки після закінчення гри завжди залишається рівно 45 купок по одному каменю в кожній.

**Математичний бій №1**

10 клас

***Краще знати зайве, чим нічого не знати.***

***Сенека***

1. Розв’язати рівняння

**

1. У банці літають 3 мухи. Всякий раз, коли мухи зі швидкостями *А > 0 і В > 0* стикаються, вони розлітаються з швидкостями *(A2+2AB)/(А+В) і B2/( А+В).* Чи може через деякий час виявитися, що всі мухи подвоїли свої швидкості? (Від зіткнення до зіткнення муха літає з постійною швидкістю, одночасно 3 мухи зіткнутися не можуть).
2. Знайти найменше натуральне число, добуток цифр якого складає .
3. При якому значенні параметра *а* рівняння  має два кореня на проміжку 
4. Зобразіть графік нерівності .
5. У трикутнику АВС проведені медіани АА1 і СС1. Відомо, що ∠АА1С=∠СС1А. Доведіть, що трикутник АВС рівнобедрений.

**Математичний бій №1** (10 клас)

1. Розв’язати рівняння

Розв’язання.













Перевіркою встановлюємо, що 15 є коренем рівняння.

1. У банці літають 3 мухи. Всякий раз, коли мухи зі швидкостями А > 0 і В > 0 стикаються, вони розлітаються з швидкостями (A2+2AB)/(А+В) і B2/( А+В). Чи може через деякий час виявитися, що всі мухи подвоїли свої швидкості? (Від зіткнення до зіткнення муха літає з постійною швидкістю, одночасно 3 мухи зіткнутися не можуть).

Розв’язання: Додамо швидкості мух до стикання і після стикання.



Як бачите вони не змінюються. Отже, швидкість в будь-який момент часу не може бути подвоєна.

1. Знайти найменше натуральне число, добуток цифр якого складає .

Розв’язання. Оскільки , то найголовніше запитання – яку найменшу кількість цифр повинно мати це число. Очевидно, що серед цифр числа немає , а також зрозуміло, що це число повинно мати цифру , бо це єдина цифра окрім , яка кратна . З десяти множників  щонайменше можна утворити 4 цифри –  або , бо найбільша можлива парна цифра , а трьох цифр  не достатньо, щоб їх добуток дорівнював . Залишається з двох наборів цифр  та  утворити найменше число. Найменша можлива перша цифра , тому шукане найменше число – це .

1. Зобразіть графік нерівності .

Розв’язання. Оскільки значення квадратного кореня є числом невід’ємним, то нерівність зводиться до сукупності  

*х*

*у*

*1*

*-1*

Графіком рівняння *х − у2 = 0* є парабола, спрямована вздовж осі абсцис. Зображенням нерівності складається з точки *х = − 1* та заштрихованої фігури.

1. У трикутнику АВС проведені медіани АА1 і СС1. Відомо, що ∠АА1С=∠СС1А. Доведіть, що трикутник АВС рівнобедрений.

Розв’язання.

А1

А

М

С1

С

В

Нехай медіани АА1 і СС1 перетинаються в точці М. Тоді за двома кутами *Δ* МАС1 і *ΔМ*СА1 подібні. Отже, ∠АС1М= ∠СА1М і . Звідки випливає, що трикутники АС1С і СА1А подібні. Отже ∠ С1АС=

=∠ А1СА. Значить, *ΔАВС −* рівнобедрений.

**Математичний бій №2**

10 клас

***Він став поетом - для математика у нього не вистачало фантазії.***

***Давид Гільберт***

***про одного зі своїх учнів***

1. Побудувати графік рівняння .
2. Визначити кількість коренів рівняння  на інтервалі [0; 2π) в залежності від значень параметра *а*.
3. Розв’язати рівняння 
4. Чи можна вci натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній гpyпi найбільше число дорівнювало сумі інших?
5. На діагоналі *АС* ромба *ABCD* взято довільну точку *Р*. Довести, що 
6. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожний, Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 5 кусків і так зробили декілька разів. Чи могло в результаті виконання таких дій получитися 1975 кусків?

**Математичний бій №2 (**10 клас) розв’язки

1. Побудувати графік рівняння .

у

х

*-1*

*1*

*-2*

*2*

*1*

*-1*

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

 

1. Чи можна вci натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній гpyпi найбільше число дорівнювало сумі інших?

Розв'язання. Припустимо, що можна. Тоді в кожній гpyпi сума чисел є парним числом, тому сума всіх чисел від 1 до 65 теж має бути парною. Однак сума 1 + 2 +...+ 65 = 65 · 33 - непарна. Суперечність. Отже, таке розбиття неможливе.

1. На діагоналі *АС* ромба *ABCD* взято довільну точку *Р*. Довести, що 

Розв’язання.У ромба діагоналі AC і BD перпендикулярні, тому трикутники AOB i POB – прямокутні. За теоремою Піфагора



А

В

С

D

O

P

Почленно віднімемо ці рівності



1. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожний, Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 5 кусків і так зробили декілька разів. Чи могло в результаті виконання таких дій одержатись 1975 кусків?

Розв’язання. Інваріантна властивість: кількість кусків після розрізання на п'ять кусків збільшується на чотири. 5+ 4n не рівно1975.

Протокол

проведення турніру математичних боїв

в рамках технічного ліцею м. Дніпродзержинська

учнів \_\_\_\_\_\_ та \_\_\_\_\_ класів від \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Склад команд:

|  |  |
| --- | --- |
| \_\_\_\_ клас | \_\_\_\_ клас |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Схема проведення бою:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | \_\_\_\_ клас | Схема виклику | \_\_\_\_ клас | Стан виклику | Журі |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Примітки: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Члени журі: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_