УДК 517.5-514.17

Об одном способе описания выпуклых поверхностей.

А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.В.Тимченко

Получено представление выпуклых поверхностей в $\mathbb{R}_n$ через значения опорной функции. Исследованы некоторые характеристики выпуклых поверхностей, в частности, получены условия поверхности равной ширины.

В работе [1] получено описание выпуклых плоских кривых через опорные функции. Основной результат этой работы можно сформулировать следующим образом.

Для функции $f(t)$, ν-я производная которой в каждой точке $t \in (a, b)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$, положим

$$f^{((\nu))}(t) = 0.5 \left(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0) \right).$$

Пусть Θ_n есть множество промежутков $[\alpha_k, \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ из $[0, 2\pi]$ таких, что $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n$.

Через Ψ_m обозначим m-мерный вектор $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ такой, что

$$\varphi_k \in (\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

и $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_m$. Обозначим через $\mathfrak{L}_m = \{l_k\}_{k=1}^m$ m-мерный вектор с положительными координатами.

Кроме того, пусть $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ класс замкнутых выпуклых жордановых кривых $\Gamma(t)$ обладающих следующими свойствам:

если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом α_i, то при переходе через эту точку угол наклона принимает значение β_i;

если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом φ_k, то касательная будет совпадать с участком кривой длины l_k.

Здесь мы считаем, что касательная в точке $(x(t), y(t))$ направлена в направлении вектора $(x'(t), y'(t))$.

Каждому набору $(\Theta_n, \Psi_m,\ \mathfrak{L}_m)$ поставим в соответствие класс $\mathfrak{T}(\Theta_n,$ $\Psi_m,\ \mathfrak{L}_m)$ 2π-периодических кусочно - дифференцируемых функций $\rho(\varphi)$ определенный следующим образом:

производная $\rho'(\varphi)$ непрерывна во всех точках промежутка $[0, 2\pi]$, кроме точек φ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, в которых имеет место соотношение

$$\rho'(\varphi_k + 0) - \rho'(\varphi_k - 0) = l_k,$$

производная $\rho^{((2))}(\varphi)$ почти всюду существует, функция $\rho(\varphi) + \rho^{((2))}(\varphi)$ не меняет знак на периоде, обращается в ноль для $\varphi \in [\alpha_k, \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и на множестве $(\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$ почти всюду отлична от нуля.

Теорема A. *Кривая $\Gamma(\rho)$ лежит к классе $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\Gamma(\rho, \varphi) = \begin{cases} x(\rho, \varphi) \\ y(\rho, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\rho(\varphi) \sin\varphi - \rho'(\varphi) \cos\varphi, \\ \rho(\varphi) \cos\varphi - \rho'(\varphi) \sin\varphi, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $\rho(\varphi)$ лежит в классе $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$.

В работе авторов [2] получено обобщение теоремы A для трехмерного пространства. Показано, что любая гладкая, выпуклая, ограниченная поверхность представима в виде:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi, \psi) \sin\psi \cos\varphi + \rho'_{\psi}(\varphi, \psi) \cos\psi \cos\varphi - \rho'_{\varphi}(\varphi, \psi) \dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \\ y = \rho(\varphi, \psi) \sin\psi \sin\varphi + \rho'_{\psi}(\varphi, \psi) \cos\psi \sin\varphi + \rho'_{\varphi}(\varphi, \psi) \dfrac{\cos\varphi}{\sin\psi}, \\ z = \rho(\varphi, \psi) \cos\psi - \rho'_{\psi}(\varphi, \psi) \sin\psi, \end{cases}$$

где функция $\rho(\varphi, \psi)$ непрерывная вплоть до всех вторых производных для $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in (0, \pi)$ такова, что имеет место неравенство

$$(\rho + \rho''_{\psi\psi})(\rho \sin^2\psi + \rho'_{\psi} \cos\psi \sin\psi + \rho''_{\varphi\varphi}) - (\rho'_{\varphi} \mathrm{ctg}\psi - \rho''_{\varphi\psi})^2 > 0.$$

С другой стороны, теорему A можно переписать в виде:

Теорема B. *Кривая $\Gamma(\rho)$ лежит к классе $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\Gamma(\rho, u, v) = \begin{cases} \rho(u, v)v - \rho'(u, v)u, \\ \rho(u, v)u + \rho'(u, v)v, \end{cases} \tag{2}$$

где (u, v) – точка на единичном круге ($u^2 + v^2 = 1$) и $\rho(u, v)$ такова, что функция $\rho(-\cos\varphi, \sin\varphi)$ лежит в классе $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$.

Введем несколько определений

Определение 1 *Неотрицательная функция $\rho(\Gamma, \boldsymbol{u})$ называется опорной функцией поверхности Γ, если $\rho(\Gamma, \boldsymbol{u})$ есть расстояние от начала координат до опорной плоскости поверхности Γ в точке $\Gamma(\boldsymbol{u})$.*

Определение 2 *Как обычно, ε-коридором $\mathcal{K}_r(\Gamma)$ поверхности Γ назовем объединение всех шаров $K_M(r)$ радиуса r с центрами, лежащими на поверхности Γ.*

Внешняя (внутренняя) огибающая $\mathcal{K}_r(\Gamma)$ называется внешней (внутренней) $r-$ эквидистантой поверхности Γ.

Определение 3 *Пусть в каждой точке поверхности $\Gamma(\boldsymbol{u})$ плотность равна $K(\boldsymbol{u})$, тогда центр тяжести поверхности называется точкой Штейнера.*

Теорема 1 *Пусть поверхность Γ в $n-$мерном пространстве $\mathbb{R}_n$ определена равенствами*

$$x_i = u_i\rho + \frac{\partial\rho}{\partial u_i} - u_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial u_j}u_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

где точка $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ лежит на сфере

$$\mathbb{S}_n = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_n : \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2} = 1\right\} \tag{4}$$

и величина

$$K(\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial u_j}u_j + \nabla\rho(\boldsymbol{u}) - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_j}u_j\right)^2\rho(\boldsymbol{u}) \tag{5}$$

на сфере (4) неотрицательна.

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. *Поверхность определенная равенствами (3) – (5) есть выпуклая замкнутая поверхность.*

2. *Плоскость, опорная к поверхности Γ в точке $\Gamma(\boldsymbol{u})$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$) имеет нормаль $\boldsymbol{u}$.*

3. *Если $\rho = \rho(\boldsymbol{u})$ неотрицательно на сфере (4), то $\rho(\boldsymbol{u})$ есть опорная функция поверхности Γ в точке $\Gamma(\boldsymbol{u})$.*

4. *Если*
$$\rho_1(\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i,$$
то поверхность $\Gamma(\rho_1)$ отличается от поверхности $\Gamma(\rho)$ лишь на сдвиг $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

5. *Поверхность $\Gamma(\rho + r)$ есть $r-$эквидистанта поверхности $\Gamma(\rho)$.*

6. *Точка Штейнера поверхности Γ вида (3) есть точка с координатами* $\operatorname{grad}(\Gamma, 0)$.

Доказательство первого свойства проводится непосредственной проверкой. Найдем Гауссову кривизну поверхности (3) и убедимся, что она имеет вид (5) и, следовательно, для того, чтобы поверхность (3) была выпуклой, ее Гауссова кривизна (5) должна быть неотрицательна.

Остальные свойства также устанавливаются с помощью непосредственных, иногда громоздких преобразований.

Из теоремы 1 можно вывести следующее утверждение:

Теорема 2 *Для того, чтобы поверхность $\Gamma(\boldsymbol{u})$ была гладкой выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (3) – (5), где $\rho(\boldsymbol{u})$ – произвольная функция, у которой первые частные производные и кривизна $K(\boldsymbol{u})$ непрерывны на сфере (4) и ее окрестности.*

Через $\Re(\Gamma, \gamma)$ обозначим наименьшее значение ε, при котором $\gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$. При этом будем говорить, что поверхность γ находится от поверхности Γ на расстоянии $\Re(\Gamma, \gamma)$.

Заметим, что таким образом введенное расстояние не является коммутативным.

Расстояние Хаусдорфа между поверхностями Γ и γ есть величина
$$\sigma(\Gamma, \gamma) = \min\{\Re(\Gamma, \gamma), \Re(\gamma, \Gamma)\}.$$

Для достаточно гладких выпуклых поверхностей Γ, γ, представимых в виде (3) имеет место равенство

$$\sigma(\Gamma, \gamma) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n} |\rho(\Gamma, \boldsymbol{u}) - \rho(\gamma, \boldsymbol{u})|.$$

Каждой ограниченной выпуклой поверхности и каждому направлению $\boldsymbol{u}$ соответствуют две несовпадающие опорные плоскости перпендикулярные этому направлению.

Если для каждого направления расстояние между этими плоскостями есть величина постоянная, то эта поверхность называется поверхностью равной ширины.

Для того, чтобы выпуклая поверхность определяемая равенствами (3) – (5) была поверхностью равной ширины d необходимо и достаточно, чтобы на сфере $\mathbb{S}_n$ выполнялись условия

$$\rho(\boldsymbol{u}) = \rho(-\boldsymbol{u}) \qquad \rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u}) = d. \tag{6}$$

Пусть функция ρ представима в виде

$$\rho(\boldsymbol{u}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho_\nu(\boldsymbol{u}), \tag{7}$$

где

$$\rho_0 = C_0, \qquad \rho_1 = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i,$$

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} u_i u_j, \quad \rho_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{i,j,k} u_i u_j u_k, \ldots$$

и

$$\rho(\boldsymbol{u}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho_{2\nu+1}(u)$$

сходится. Тогда условие (6) выполняется.

В заключение приведем несколько результатов для трехмерного случая, которые следуют из теоремы 1.

Для произвольной пары ортогональных векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ для выпуклой поверхности Γ существует единственный прямой параллелепипед описанный вокруг Γ с ребрами параллельными векторам $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ векторное произведение векторов). Если для любых ортогональных векторов $\boldsymbol{u}$ и

$\boldsymbol{v}$ сумма всех ребер этого параллелепипеда равна P, то такая поверхность называется P-поверхностью, если площадь поверхности этого параллелепипеда равен фиксированному S, то поверхность называется S-поверхностью, а если для любых ортогональных векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ объем описанного параллелепипеда равен фиксированному V, то такая поверхность называется V-поверхностью.

Теорема 3 *Любая P-поверхность Γ представима в виде (3), где функция ρ удовлетворяет условию*

$$\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u}) + \rho(\boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{v}) + \rho(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \frac{P}{4},$$

$S-$ поверхность определяется опорной функцией удовлетворяющей условию

$$(\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u}))(\rho(\boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{v})) + (\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u}))(\rho(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})) +$$

$$+(\rho(\boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{v}))(\rho(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})) = 2S,$$

а каждая V-поверхность Γ представима в виде (3), где функция ρ удовлетворяет условию

$$(\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u}))(\rho(\boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{v}))(\rho(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \rho(-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})) = V,$$

где $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ортогональные векторы на сфере $\mathbb{S}_3$.

Литература

[1] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* О геометрии выпуклых кривых.- Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Том 4, вып. 3, с. 88-92.

[2] *Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А.* О геометрии выпуклых поверхностей.- Вістник Дніпропетровського університету, Математика,3, 1998, с.85-92.

[3] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества.- М., Наука, 1985, 335 с.

[4] *И.М.Яглом, В.Г.Болтянский* Выпуклые фигуры. М., Гостехиздат, 1951, 250 с.

Об одном способе описания выпуклых поверхностей.
А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.В.Тимченко
Получено представление выпуклых поверхностей в $\mathbb{R}_n$ через значения опорной функции. Найдены условия, обеспечивающие условие равной ширины поверхности, а также получены некоторые характеристики таких поверхностей.

Про один засіб опису опуклих поверхонь. *А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.В.Тимченко*
Отримано вигляд опуклих поверхонь у $\mathbb{R}_n$ через значення опірноі функції. Знайдені умови які забеспечують вимоги равноі ширини поверхні, а також отримані деякі характеристики таких поверхонь.

About one method of exposition of convex surfaces.
A.Ligun, A.Shumeiko, S.Timchenko
The representation of convex surfaces in $\mathbb{R}_n$ through values is obtained function of supports. The conditions, ensuring a condition of an equal breadth are found the surfaces, and also are obtained some performances of such surfaces.