A.Ligun, A.Shumeiko,S.Timchenko
Geometry of convex surfaces. East Journal of Approximation, (2002), v.8, N 1, 1-43.
УДК 517.5

Геометрия выпуклых поверхностей.

А.А.Лигун, С.В.Тимченко
Днепродзержинский гос. технический университет,
А.А.Шумейко
Днепропетровский юридический институт МВД Украины

В данной работе исследуется представление выпуклых поверхностей в пространстве $\mathbb{R}_n$, основой которого является параметризация выпуклой поверхности по нормальному вектору единичной сферы. Основываясь на этом представлении, изучены некоторые свойства выпуклых поверхностей. Часть результатов работы анонсирована в [1] и данная работа является логическим продолжением (распространением на случай $n-$мерных пространств) результатов работ [2], [3], [4].

1. Прежде всего приведем несколько определений и понятий, необходимых нам в дальнейшем.

Тело $\mathbb{T} \in \mathbb{R}_n$ будем называть строго выпуклым, если для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$ и любого $\lambda \in (0,1)$ точка $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ является внутренней точкой множества $\mathbb{T}$.

Границу $\partial\mathbb{T}$ строго выпуклого тела $\mathbb{T}$ в $\mathbb{R}_n$ будем называть строго выпуклой поверхностью без края в $\mathbb{R}_n$ (или просто выпуклой поверхностью, если это не вызывает недоразумений).

Плоскость (гиперплоскость) $\pi_{u_1}(\boldsymbol{y})$ $(\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{S}_n)$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{u}_1) = 0 \ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_n)$$

будем называть опорной плоскостью поверхности $\boldsymbol{y}$в точке $\boldsymbol{u}_0$ с нормальным вектором $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{S}_n$, если для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$ выполняется неравенство $(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{u}_1) \geq 0$. Здесь и далее

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$$

скалярное произведение элементов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}-$ длина $\boldsymbol{u}$.

Пусть

$$\mathbb{S}_n^R = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_n; \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (u^i)^2 - R^2 \right) = 0 \right\} \tag{1}$$

сфера в $\mathbb{R}_n$ с центром в начале координат радиуса R и $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_n^1$, а B_n единичный шар в $\mathbb{R}_n$.

В дальнейшем будем считать, что начало координат есть внутренняя точка тела, ограниченного рассматриваемой выпуклой поверхностью. Как будет видно из дальнейшего (см. предложение 1), это условие не ограничивает общности построений.

Опорной функцией $\theta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$ $(\theta(\boldsymbol{y}) : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}_1)$ выпуклой поверхности $\boldsymbol{y}$ называют скалярную функцию, определяемую как расстояние от начала координат до опорной плоскости к $\boldsymbol{y}$ с нормальным вектором $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$.

Здесь и далее через $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})|_Q$ будем обозначать сужение отображения $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$ на множество Q. В этом случае часто мы будем писать $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$.

Далее, как обычно, будем считать, что $C^m(Q)-$ множество всех функций $f : Q \to \mathbb{R}_1$ ($Q \in \mathbb{R}_n$) непрерывных на Q вместе со своими частными производными до m-го порядка включительно.

Вместо $\frac{\partial \rho}{\partial u^i}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^i \partial u^j}$ будем писать ρ_{u^i}, $\rho_{u^i u^j}$ соответственно, и положим

$$\boldsymbol{x}_{u^i}(\boldsymbol{u}) = (x^1_{u^i}(\boldsymbol{u}), x^2_{u^i}(\boldsymbol{u}), \ldots, x^n_{u^i}(\boldsymbol{u})).$$

Кроме того, пусть

$$\nabla\rho(\boldsymbol{u}) = (\rho^1_{u^i}(\boldsymbol{u}), \rho^2_{u^i}(\boldsymbol{u}), \ldots, \rho^n_{u^i}(\boldsymbol{u}))$$

– градиент функции $\rho(\boldsymbol{u})$ в точке $\boldsymbol{u}$ и

$$\Delta\rho(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{u^i u^i}(\boldsymbol{u})$$

– значение оператора Лапласа функции ρ в точке $\boldsymbol{u}$.

Рассмотрим поверхность $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ (отображение $\boldsymbol{x}(\rho) : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}_n$) заданную равенством

$$\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = [(\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\boldsymbol{u} + \nabla\rho(\boldsymbol{u})]\Big|_{\mathbb{S}_n}. \tag{2}$$

Мы покажем, что при некотором (естественном) условии на функцию $\rho(\boldsymbol{u})$ поверхность $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ является выпуклой (строго выпуклой) поверхностью и опорная функция этой поверхности равна $\theta(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u})$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$).

Далее мы покажем, что любая гладкая строго выпуклая поверхность представима в виде (2). Таким образом изучение выпуклых поверхностей фактически сводится к изучению поверхностей вида (2).

В дальнейшем всюду будем предполагать, что функция ρ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности единичной сферы $\mathbb{S}_n$.

Положим

$$\sigma(\boldsymbol{u}) = \sigma(\rho, \boldsymbol{u}) = (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}),$$

$$\lambda(\boldsymbol{u}) = \lambda(\rho, \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) - \sigma(\boldsymbol{u}),$$

$$c_{i,j} = c_{i,j}(\rho, \boldsymbol{u}) = \rho_{u^i u^j} - u^i\sigma(\boldsymbol{u}) + \lambda(\boldsymbol{u})\delta_{i,j}, \tag{3}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) = \{c_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{n,n}, \tag{4}$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Матрица $\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})$ будет играть важную роль в дальнейших исследованиях. Многие характеристики выпуклых поверхностей связаны со свойствами матрицы $\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})$.

Приведем два важных свойства матрицы $\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})$, необходимые нам в дальнейшем.

Прежде всего отметим, что из (3) вытекает равенство

$$\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}u^k = \lambda u^i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Кроме того, полагая

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} \rho_{k,j}u_k, \quad \boldsymbol{b} = (b^1, \ldots, b^n) \quad B = \sum_{i=1}^{n} b^i, \tag{6}$$

получаем

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}u^j = \sum_{i=1}^{n}(\rho_{u^iu^j} - b_j u^i + \lambda\delta_{i,j})u^j = b_j - Bu^j + \lambda u^j, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Из равенств (5) и (7) следуют соответственно равенства

$$(8)\qquad \boldsymbol{u}\ \mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$$

и

$$(9)\qquad \boldsymbol{u}\ \mathbb{C}^T(\rho, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b} + (\lambda - B)\boldsymbol{u},$$

где $\mathbb{C}^T(\rho, \boldsymbol{u})$ есть транспонированная матрица $\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})$.

Основные результаты данной работы существенно опираются на следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$ – нормальный вектор поверхности $\boldsymbol{y}$в точке $\boldsymbol{u}$ и*

$$(10)\qquad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})|}$$

нормированный нормальный вектор этой поверхности в точке $\boldsymbol{u}$, тогда если поверхность $\boldsymbol{x}(\rho)$ задана равенством (2), то

$$(11)\qquad \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\lambda(\boldsymbol{u})}|\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})|\boldsymbol{u}.$$

и

$$(12)\qquad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}.$$

Доказательство. Пусть $\Re \in \mathbb{R}_n$ некоторая гладкая поверхность, $\Re_\varepsilon$ некоторая окрестность этой поверхности и отображение $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) : \Re_\varepsilon \to \mathbb{R}_n)$ непрерывно дифференцируемо в $\Re_\varepsilon$.

Тогда нормальный вектор $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$ поверхности $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ равен

$$(13)\qquad \boldsymbol{N}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} i^1 & y^1_{u^1}(\boldsymbol{u}) & \dots & y^1_{u^{n-1}}(\boldsymbol{u}) \\ i^2 & y^2_{u^1}(\boldsymbol{u}) & \dots & y^2_{u^{n-1}}(\boldsymbol{u}) \\ & & \dots & \\ i^n & y^n_{u^1}(\boldsymbol{u}) & \dots & y^n_{u^{n-1}}(\boldsymbol{u}) \end{vmatrix},$$

где $i^1, i^2, \dots, i^n-$ орты $\mathbb{R}_n$ и $\boldsymbol{u} \in \Re$.

Пусть отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v}) : \Re_\varepsilon \to \mathbb{R}_n)$ непрерывно дифференцируема на $\Re_\varepsilon$.

Если поверхность $\Re$ задается уравнением

$$(14)\qquad \varphi(u^1, u^2, \dots, u^n) = 0, \quad (u^n = u^n(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})),$$

то положим

$$(15)\qquad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}, \varphi) = \boldsymbol{x}(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}, u^n(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})).$$

В этом случае

$$\boldsymbol{y}_{u^i} = \boldsymbol{x}_{u^i} + \boldsymbol{x}_{u^n} u^n_{u^i}.$$

Кроме того, из (14)

$$u^i + u^n_{u^i} u^n = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{y}_{u^i} = \boldsymbol{x}_{u^i} + \boldsymbol{x}_{u^n}\left(-\frac{u^i}{u^n}\right). \tag{16}$$

В этом случае определитель (13) перепишется в виде

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} i^1 & x^1_{u^1} + x^1_{u^n}\left(-\frac{u^1}{u^n}\right) & \dots & x^1_{u^{n-1}} + x^1_{u^n}\left(-\frac{u^{n-1}}{u^n}\right) \\ i^2 & x^2_{u^1} + x^2_{u^n}\left(-\frac{u^1}{u^n}\right) & \dots & x^2_{u^{n-1}} + x^2_{u^n}\left(-\frac{u^{n-1}}{u^n}\right) \\ & & \dots & \\ i^n & x^n_{u^1} + x^n_{u^n}\left(-\frac{u^1}{u^n}\right) & \dots & x^n_{u^{n-1}} + x^n_{u^n}\left(-\frac{u^{n-1}}{u^n}\right) \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что если $\Re = \mathbb{S}_n$ то равенство (17) примет вид

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ i^1 & x^1_{u^1} & x^1_{u^2} & \dots & x^1_{u^n} \\ & & & \dots & \\ i^n & x^n_{u^1} & x^n_{u^2} & \dots & x^n_{u^n} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Пусть поверхность $\boldsymbol{x}(\rho,\boldsymbol{u})$ задается уравнением (2), в этом случае

$$x^k_{u^i} = c_{i,k}, \tag{19}$$

где $c_{i,k} = c_{i,k}(\rho,\boldsymbol{u})$ определены равенствами (3).

Отсюда и из (18) имеем

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ i^1 & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ & & & \dots & \\ i^n & c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Умножим $i+1$-ю строку определителя (20) на $-u^i/\lambda$, сложим полученные строки и прибавим результат к первой строке. Это приведет нас к равенствам

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n u^k i^k & 0 & \dots & 0 \\ i^1 & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ i^n & c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & 0 & \dots & 0 \\ i^1 & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ i^n & c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{u}\begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ & \dots & \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{u}|\mathbb{C}(\rho,\boldsymbol{u})|,$$

что и доказывает равенство (11). Равенство (12) из (11) следует очевидным образом.

Сформулируем несколько утверждений, которые следуют из теоремы 1.

Следствие 1. *Касательная (опорная) плоскость $\pi_u(\rho)$ к поверхности $\boldsymbol{x}(\rho)$ в точке $\boldsymbol{x}(\rho,\boldsymbol{u})$ (здесь и далее $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$) задается уравнением*

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}); \tag{21}$$

ортогональная проекция $\boldsymbol{x}^\perp(\rho,\boldsymbol{u})$ начала координат на плоскость $\pi_u(\rho)$ определяется равенством

$$\boldsymbol{x}^\perp(\rho,\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}; \tag{22}$$

$\rho(\boldsymbol{u})$ *есть опорная функция поверхности* $\boldsymbol{x}(\rho)$, *то есть*

$$\theta(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) \tag{23}$$

и

$$(\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}), \tag{24}$$

а также

$$\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}^{\perp}(\rho, \boldsymbol{u}) = (\nabla\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{u}. \tag{25}$$

Доказательство. Из (2) следует, что опорная плоскость $\pi_u(\rho)$ задается уравнением

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = 0. \tag{26}$$

Кроме того,

$$(\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = ((\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{u} + \nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) =$$
$$= \rho(\boldsymbol{u})|\boldsymbol{u}|^2 - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})|\boldsymbol{u}|^2 + (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}),$$

то есть

$$(\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}),$$

и равенство (24) доказано. Используя это равенство в (26), получим (21).

Прямая, проходящая через начало координат и ортогональная опорной плоскости $\pi_u(\rho)$ задается уравнением

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}\tau \quad (\tau \in \mathbb{R}_1).$$

Таким образом $\boldsymbol{x}^{\perp}(\rho, \boldsymbol{u})$ есть решение системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}\tau, \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) \end{cases} \iff \boldsymbol{x} = \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}.$$

Отсюда получаем равенство (23). Равенство (25) получено из (23) и представления (2).

Равенства (23) и (24) утверждают, что если поверхность определена равенством (2) и $\rho(\boldsymbol{x}) > 0$, то $\rho(\boldsymbol{x})$ есть опорная функция этой поверхности. С другой стороны, для любой гладкой строго выпуклой поверхности, ограничивающей тело, содержащее начало координат, каждое направление $\boldsymbol{u}$определяет одну и только одну опорную плоскость к этой поверхности с нормальным вектором $\boldsymbol{u}$ и одну и только одну точку касания этой опорной плоскости с поверхностью.

Поставим в соответствие вектору $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n)$ эту точку поверхности. Тем самым мы получим представление поверхности $\boldsymbol{x}$ как отображение единичной сферы в $\mathbb{R}_n$ такое, что $\boldsymbol{u}$ есть нормальный вектор этой поверхности в точке $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$. Учитывая, что для поверхности вида (2) равенство (23) верно для любой гладкой функции ρ, заключаем, что (2) и является таким представлением поверхности.

Следующее утверждение иллюстрирует естественную связь сдвига и поворота выпуклой поверхности с соответствующими преобразованиями опорной функции.

Предложение 1. *Равенство*

$$\boldsymbol{x}(\rho_c, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{c}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\rho_c(\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}).$$

Для любой ортогональной матрицы A порядка n (то есть $AA^T = E$, где E – единичная матрица), выполняется равенство

$$\boldsymbol{x}(\rho(A\cdot), \boldsymbol{u}) = A^{-1}\boldsymbol{x}(\rho, A\boldsymbol{u}). \tag{27}$$

Действительно,

$$\boldsymbol{x}(\rho_c, \boldsymbol{u}) = (\rho(\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}) - (\nabla(\rho(\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})), \boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{u} + \nabla(\rho(\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})) =$$
$$= \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \nabla\rho(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{c} =$$
$$= (\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{u} + (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{c}.$$

Далее

$$\boldsymbol{x}(\rho, A\boldsymbol{u}) = (\rho(A\boldsymbol{u}) - (\nabla(\rho(A\boldsymbol{u})), A\boldsymbol{u}))\, A\boldsymbol{u} + \nabla(\rho(A\boldsymbol{u})).$$

Кроме того

$$\nabla(\rho(A\boldsymbol{u})) = A\nabla\rho(A\boldsymbol{u}),$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{x}(\rho, A\boldsymbol{u}) = (\rho(A\boldsymbol{u}) - (A\nabla\rho(A\boldsymbol{u}), A\boldsymbol{u}))\, A\boldsymbol{u} + A\nabla\rho(A\boldsymbol{u}).$$

Используя в последнем соотношении равенство $(Ax, Ay) = (x, y)$, сразу получаем

$$\boldsymbol{x}(\rho, A\boldsymbol{u}) = (\rho(A\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(A\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\, A\boldsymbol{u} + A\nabla\rho(A\boldsymbol{u}) =$$
$$= A\boldsymbol{x}(\rho(A\cdot), \boldsymbol{u}),$$

что и доказывает (27).

Отметим еще несколько утверждений.

Предложение 2. *Пусть $Q \in \mathbb{S}_n$ и в некоторой окрестности Q*

$$\rho(\boldsymbol{u}) = R + (C, \boldsymbol{u}),$$

тогда для $\boldsymbol{u} \in Q$

$$\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = R\boldsymbol{u} + C$$

и на множестве Q поверхность $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ совпадает со сферой с центром в точке C радиуса R, и наоборот.

Действительно, если $\rho(\boldsymbol{u}) = R$, то $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = R\boldsymbol{u}$ и остается воспользоваться утверждением предложения 1.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ $(\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n)$– гладкая строго выпуклая поверхность в $\mathbb{R}_n$. Для $\eta > 0$ геометрическое место концов нормальных векторов $\eta\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ с началами на поверхности $\boldsymbol{x}$ в точке $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ назовем внешней $\eta-$ эквидистантой поверхности $\boldsymbol{x}$ и обозначим $\boldsymbol{x}_\eta^+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, а геометрическое место концов нормальных векторов $-\eta\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ назовем внутренней $\eta-$ эквидистантой и обозначим $\boldsymbol{x}_\eta^-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$.

Предложение 3. *Для любого $\eta > 0$*

$$\boldsymbol{x}_\eta^\pm(\rho, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(\rho \pm \eta, \boldsymbol{u}).$$

2. Многие геометрические свойства поверхности связаны с ее характеристиками – первой, второй и третьей основными квадратичными формами. Найдем эти характеристики для поверхностей вида (2).

Пусть $\Re$ поверхность в пространстве $\mathbb{R}_n$ и $\Re_\varepsilon$ некоторая окрестность этой поверхности, отображение $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) : \Re_\varepsilon \to \mathbb{R}_n)$ непрерывно дифференцируемо в $\Re_\varepsilon$.

Первой основной квадратичной формой отображения $\boldsymbol{y}$ называется величина

$$M_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = \left|\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_{u^j} du^j\right|^2,$$

второй основной квадратичной формой отображения $\boldsymbol{y}$ называется величина

$$M_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(\boldsymbol{y}_{u^i}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}))du^i du^j, \tag{28}$$

определитель второй основной квадратичной формы называется радиусом кривизны $r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$, а величина

$$k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) = \frac{1}{r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})}$$

– гауссовой кривизной поверхности $\boldsymbol{y}$ в точке $\boldsymbol{u}$.

Третьей основной квадратичной формой отображения $\boldsymbol{y}$ называется величина

$$M_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = |d\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|^2.$$

Теорема 2. *Пусть поверхность $\boldsymbol{x}(\rho,\boldsymbol{u})$ определена равенствами (2), тогда*

$$M_1(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = \left(d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}(\mathbb{C}(\rho,\boldsymbol{u})\mathbb{C}^T(\rho,\boldsymbol{u}))\right)|_{\mathbb{S}_n}, \tag{29}$$

$$M_2(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = -(d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho,\boldsymbol{u}))|_{\mathbb{S}_n}, \tag{30}$$

$$M_3(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = (d\boldsymbol{u})^2 \tag{31}$$

и

$$r(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\lambda}|\mathbb{C}(\rho,\boldsymbol{u})|, \tag{32}$$

где $d\boldsymbol{u} = (du^1, du^2, \ldots, du^n) \in \mathbb{S}_n$, $(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = 0$, матрица $\mathbb{C}(\rho,\boldsymbol{u})$ определена равенствами (3), (4).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})$ отображение некоторой окрестности сферы $\mathbb{S}_n$ в $\mathbb{R}_n$ и $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})|_{\mathbb{S}_n} = \boldsymbol{x}(u^1\ldots,u^{n-1},u^n(u^1\ldots,u^{n-1}))$, $(\sum_{i=1}^n (u^i)^2 = 1)$. Из определения первой основной квадратичной формы и равенств (16) следует, что

$$M_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(\boldsymbol{x}_{u^i} - \boldsymbol{x}_{u^n}\frac{u^i}{u^n}\right)\left(\boldsymbol{x}_{u^j} - \boldsymbol{x}_{u^n}\frac{u^j}{u^n}\right)\right]du^i du^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{x}_{u^j}) - \frac{u^i}{u^n}(\boldsymbol{x}_{u^j},\boldsymbol{x}_{u^n}) - \frac{u^j}{u^n}(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{x}_{u^n}) + \frac{u^i u^j}{u^n}(\boldsymbol{x}_{u^n},\boldsymbol{x}_{u^n})\right]du^i du^j. \tag{33}$$

Кроме того, в силу равенства $(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = 0$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{u^j}{u^n}(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{x}_{u^n})du^i du^j =$$

$$= \frac{1}{u^n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\boldsymbol{x}_{u^i}, \sum_{j=1}^{n-1} u^j du^j \boldsymbol{x}_{u^n}\right)du^i = -\sum_{i=1}^{n-1}(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{x}_{u^n})du^i du^n$$

и, аналогично,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{u^i}{u^n}(\boldsymbol{x}_{u^j},\boldsymbol{x}_{u^n})du^idu^j=-\sum_{j=1}^{n-1}(\boldsymbol{x}_{u^j},\boldsymbol{x}_{u^n})du^jdu^n.$$

Таким образом

$$M_1(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{x}_{u^j})du^jdu^j.$$

Отсюда и из (3), получаем

$$M_1(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}c_{k,j}du^jdu^j=\left(d\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho,\boldsymbol{u})\mathbb{C}^T(\rho,\boldsymbol{u})\right),$$

что и доказывает (29).

Далее, в силу (16), вторую основную квадратичную форму можно записать в виде

$$M_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u})=-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\boldsymbol{x}_{u^i}-\boldsymbol{x}_{u^n}\frac{u^i}{u^n},\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j,\tag{34}$$

следовательно,

$$M_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u})=-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j+\boldsymbol{x}_{u^n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{u^i}{u^n},\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j+\frac{\boldsymbol{x}_{u^n}}{u^n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(u^i,\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j.\tag{35}$$

Учитывая, что $(\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u})=0$, и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n-1}u^idu^i=-u^ndu^n,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(u^i,\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j=\sum_{i=1}^{n-1}du^i\left(u^i,\sum_{j=1}^{n-1}\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^j=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n-1}du^i\left(u^i,\boldsymbol{n}_{u^n}(\boldsymbol{y})\right)du^n=\sum_{i=1}^{n-1}\left(u^i,\boldsymbol{n}_{u^n}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^n.$$

Таким образом,

$$M_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},d\boldsymbol{u})=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{x}_{u^i},\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{y})\right)du^idu^j.\tag{36}$$

В случае, когда поверхность $\boldsymbol{x}(\rho,\boldsymbol{u})$ задана равенством (2), то $x^j_{u^i}=c_{i,j}$, кроме того, в силу теоремы 1, получаем $\boldsymbol{n}(\rho,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$, следовательно, $\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u})=i^j$, поэтому

$$(\boldsymbol{x}_{u^i}(\rho,\boldsymbol{u}),\boldsymbol{n}_{u^j}(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}))=x^j_{u^i}=c_{i,j},$$

что вместе с (36) и завершает доказательство равенства (30).

Соотношение (31) следует сразу из теоремы 1.

Если поверхность задана уравнением (2), то из определения радиуса кривизны и (16) получаем

$$r(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}) = -\left|\left\{x^j_{u^i} - x^j_{u^n}\frac{u^i}{u^n}\right\}_{i=1,j=1}^{n-1,n-1}\right| =$$

$$= -\begin{vmatrix} x^1_{u^1} - x^1_{u^n}\frac{u^1}{u^n} & \dots & x^1_{u^{n-1}} - x^1_{u^n}\frac{u^{n-1}}{u^n} \\ x^2_{u^1} - x^2_{u^n}\frac{u^1}{u^n} & \dots & x^2_{u^{n-1}} - x^2_{u^n}\frac{u^{n-1}}{u^n} \\ & \dots & \\ x^{n-1}_{u^1} - x^{n-1}_{u^n}\frac{u^1}{u^n} & \dots & x^{n-1}_{u^{n-1}} - x^{n-1}_{u^n}\frac{u^{n-1}}{u^n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{u^n}\begin{vmatrix} x^1_{u^1} & \dots & x^1_{u^{n-1}} & x^1_{u^n} \\ x^2_{u^1} & \dots & x^2_{u^{n-1}} & x^2_{u^n} \\ & \dots & & \\ x^{n-1}_{u^1} & \dots & x^{n-1}_{u^{n-1}} & x^{n-1}_{u^n} \\ u^1 & \dots & u^{n-1} & u^n \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Заметим, что из (20) следует, что k-я координата вектора $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u})$ равна

$$\boldsymbol{N}^k(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}) = (-1)^k\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,n} \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \dots & c_{k+1,n} \\ & & \dots & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,n} \\ u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \dots & c_{k+1,n} \\ & & \dots & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, в силу теоремы 1,

$$\boldsymbol{N}^k(\boldsymbol{x}(\rho),\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} u^k.$$

Таким образом

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,n} \\ u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \dots & c_{k+1,n} \\ & & \dots & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ & & \dots & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} u^k.$$

Отсюда при $k = n$, из (19) и (37) сразу получаем соотношение (32).

Положим

$$\rho_{i,j} = \rho_{u^i u^j}(\boldsymbol{u}) \tag{38}$$

тогда равенство (32) можно переписать в виде

$$r(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \rho_{1,1} - b_1 u^1 + \lambda & \rho_{1,2} - b_2 u^1 & \dots & \rho_{1,n} - b_n u^1 \\ \rho_{2,1} - b_1 u^2 & \rho_{2,2} - b_2 u^2 + \lambda & \dots & \rho_{2,n} - b_n u^2 \\ & & \dots & \\ \rho_{n,1} - b_1 u^n & \rho_{n,2} - b_2 u^n & \dots & \rho_{n,n} - b_n u^n + \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ & & & \dots & \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{vmatrix}.$$

Почленно умножим i-ю строку полученного определителя на u^{i-1} и вычтем из первой строки. Учитывая после этого равенство (38) и тот факт, что $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$, получаем

$$r(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} 0 & -\lambda u^1 & -\lambda u^2 & \dots & -\lambda u^n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ & & & \dots & \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{vmatrix}.$$

Таким образом радиус кривизны поверхности (2) можно записать следующим образом:

$$r(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \frac{1}{\lambda}|\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})| = -\begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ & & & \dots & \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{vmatrix}, \tag{39}$$

где $\lambda = \lambda(\rho, \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})$.

Замечание 1. *Из равенства (39) следует, что если для всех $\boldsymbol{v}$в окрестности единичной сферы $\rho_{i,j} = 0$ $(i, j = 1, \dots, n)$, то*

$$r(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = -\begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ u^2 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ u^n & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\rho, \boldsymbol{u}), \tag{40}$$

где $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$

Как известно, кривизна нормального сечения отображения $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ ($\boldsymbol{y} : \Re \to \mathbb{R}_n$, $\Re$ гладкая поверхность лежащая в $\mathbb{R}_n$) в точке $\boldsymbol{u}$ плоскости, которая проходит через бесконечно близкую точку этой поверхности $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$ равна

$$K_d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{u}) = -\frac{M_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u})}{M_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u})}.$$

Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Для поверхности вида (2) кривизна нормального сечения в точке* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$*, плоскости проходящей через бесконечно близкую точку этой поверхности* $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$ $((\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = 0)$ *равна*

$$K_{d\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = \frac{(d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}))}{\big(d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}(\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})\mathbb{C}^T(\rho, \boldsymbol{u}))\big)}.$$

Для многих приложений условие $(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = 0$ осложняет решение задач. Например, задача нахождения главных кривизн сводится к двух параметрической задаче на собственные значения

$$\big|\mu_0\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) + \mu_1\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})\mathbb{C}^T(\rho, \boldsymbol{u}) + \mu_2\mathbb{U}\big| = 0,$$

где

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Этот недостаток можно устранить, положив

$$d\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}.$$

Тогда для любого $d\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_n$ условие $(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = 0$ выполняется и, кроме того, основные квадратичные формы примут вид

$$M_1(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = (d\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})\mathbb{C}^T(\rho, \boldsymbol{u})) - 2\lambda(d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + \lambda^2(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})^2,$$
$$M_2(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = (d\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{x})) - (d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}))$$

и

$$M_3(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = |d\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})^2.$$

Действительно, так как

$$(\boldsymbol{u}, \mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) = \lambda\boldsymbol{u} \quad (\lambda(\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})),$$

то по теореме 2 для $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_n$

$$M_1(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = (d\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})\mathbb{C}^T(\rho, \boldsymbol{u})) = |d\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})|^2 =$$
$$= |d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})|^2 = |d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\lambda\boldsymbol{u}|^2 =$$
$$= |d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})|^2 - 2\lambda(d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + \lambda^2(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})^2,$$

то есть

$$M_1(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = |d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})|^2 - 2\lambda(d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + \lambda^2(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})^2.$$

Далее,

$$M_2(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = -(d\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) =$$
$$= -(d\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u}) - \lambda(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}) =$$
$$= -\big((\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) - \lambda(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + \lambda(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})^2|\boldsymbol{u}|^2\big) =$$
$$= -(d\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + (d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})), \tag{41}$$

то есть

$$M_2(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = -(d\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + (d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})).$$

Наконец,

$$M_3(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = |d\boldsymbol{u}|^2 = |d\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}|^2 = |d\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v})^2.$$

Заметим, что из (41) и (9) следует, что вторую квадратичную форму можно записать в виде

$$M_2(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}, d\boldsymbol{u}) = -(d\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{v}\mathbb{C}(\rho, \boldsymbol{u})) + (d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})(d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}) - (B-\lambda)(d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^2.$$

Хорошо известно, что если у поверхности без края радиус кривизны в каждой точке есть величина положительная, то это выпуклая поверхность. Отсюда и из теоремы 1 и замечания к ней, следует, что любую строго выпуклую гладкую поверхность можно представить в виде (2) при условии, что ее радиус кривизны всегда положительный. Для удобства ссылок сформулируем этот факт в виде теоремы.

Теорема 3. *Для любой строго выпуклой гладкой поверхности найдется положительная функция $\rho(\boldsymbol{u})$ (опорная функция этой поверхности), такая, что эта поверхность представима в виде*

$$\text{(42)}\qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = (\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\boldsymbol{u} + \nabla\rho(\boldsymbol{u}) \\ r(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{k(\rho, \boldsymbol{u})} = -\begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & \rho_{1,1}+\lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2}+\lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ & & & \dots & \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n}+\lambda \end{vmatrix} > 0, \end{cases} \qquad (\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n).$$

В дальнейшем всюду, говоря о свойствах поверхности, будем подразумевать, что изучаем поверхности вида (42), то есть будем изучать строго выпуклые поверхности, иногда с некоторыми оговорками о гладкости и нестрогой выпуклости.

3. Пусть $d\boldsymbol{u}$ инвариантная относительно группы вращения $SO(n)$ мера Хаара на сфере $\mathbb{S}_n$, нормированная так, что

$$\int_{\mathbb{S}_n} d\boldsymbol{u} = \sigma(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} \frac{2^m\pi^{m-1}}{(2m-3)!!}, & n = 2m-1, \\ \frac{2\pi^m}{(m-1)!}, & n = 2m, \end{cases}$$

где $\sigma(\boldsymbol{y})$ полная поверхность $\boldsymbol{y}$.

Обозначим через L_2 множество всех функций f заданных на сфере $\mathbb{S}_n$, с ограниченной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\sigma(S_n)}\int_{\mathbb{S}_n} f^2(\boldsymbol{u})|d\boldsymbol{u}|\right)^{1/2}.$$

Под элементом поверхности $d\boldsymbol{x}$, заданной на сфере, будем понимать величину $d\boldsymbol{v} = d_x\boldsymbol{v} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})|_{\mathbb{S}_n} d\boldsymbol{u}$. Тогда

$$\text{(43)}\qquad \int_{x(u)} f(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v} = \int_{\mathbb{S}_n} f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}.$$

Далее нам потребуются несколько понятий из гармонического анализа на сфере.

Функцию

$$\prod_{\nu=1}^{n} u_\nu^{\alpha_\nu} \qquad \left(\alpha_\nu \in \mathbb{N}^+, \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = 1\right)$$

называют алгебраическим мономом порядка k в пространстве $\mathbb{R}_n$.

Линейную комбинацию мономов $k-$го порядка будем называть n-мерным однородным полиномом $k-$го порядка и обозначать через $P_k(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_n)$.

Отметим (в дальнейшем этот факт будет существенно использоваться), что для любого однородного полинома $k-$го порядка выполняется тождество Эйлера (см., например, [8])

$$(\nabla P_k(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = kP_k(\boldsymbol{v}). \tag{44}$$

Если однородный полином $k-$го порядка $\hat{H}_k(\boldsymbol{v})$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \hat{H}_k(\boldsymbol{v}) = 0,$$

то его мы будем называть n-мерным гармоническим однородным полиномом $k-$го порядка и, наконец, если $\hat{H}_k(\boldsymbol{v})$ однородный гармонический полином $k-$го порядка, то функцию $H_k(\boldsymbol{u})$ $(H_k : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}_1)$ равную $\hat{H}_k(\boldsymbol{v})|_{\mathbb{S}_n}$ называют гармоникой $k-$го порядка.

Для гармоник $H_k(\boldsymbol{u})$ и $H_m(\boldsymbol{u})$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{S}_n} H_k(\boldsymbol{u}) H_m(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u} = 0 \quad (m, k = 0, 1, \ldots, k \neq m). \tag{45}$$

Любая функция $\rho \in L_2(\mathbb{S}_n)$ однозначно представима в виде ряда

$$\rho(\boldsymbol{u}) = H_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\rho, \boldsymbol{u}) \quad (u \in \mathbb{S}_n), \tag{46}$$

где $H_k(\rho, \boldsymbol{u})$ гармонические однородные полиномы $k-$го порядка также однозначно определяются функцией $\rho(\boldsymbol{u})$.

Отсюда, используя тождество Эйлера, получаем

$$(\nabla \rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} k H_k(\rho, \boldsymbol{u}) \tag{47}$$

и если поверхность представима в виде (42), то

$$\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = u \left(H_0(\rho) - \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\rho, \boldsymbol{u})(k-1) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \nabla H_k(\rho, \boldsymbol{u}). \tag{48}$$

Из равенства (45) следует, что если $f \in L_2$ (в частности, если f непрерывна на сфере), то

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u} = H_0(f) \sigma(\mathbb{S}_n). \tag{49}$$

Все эти утверждения можно найти, например, в монографии [8], глава 4.

Как видно из (49), при вычислении интегралов существенную роль играет число $H_0(f)$, то есть свободный член разложения функции в ряд (46).

Для вычисления такого рода интегралов полезно следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть $f(\boldsymbol{u})$ сужение полинома $f(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_n)$ на сферу $\mathbb{S}_n$, тогда*

$$H_0(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k f|_0.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $Q_m(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_n)$ полином порядка не выше m, то

$$H_0(Q_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k Q_m|_0.$$

Пусть

$$Q_m = P_0(\boldsymbol{v}) + P_1(\boldsymbol{v}) + \ldots + P_m(\boldsymbol{v}),$$

где $P_k(\boldsymbol{v})$ однородные полиномы порядка k.

По теореме Стейна-Вейса (см. [8], стр. 159) любой однородный полином $P_{2k}(\boldsymbol{v})$ ($\boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_n$) порядка $2k$ представим в виде

$$P_{2k}(\boldsymbol{v}) = H_{2k}(P_{2k}, \boldsymbol{v}) + |\boldsymbol{v}|^2 H_{2k-2}(P_{2k}, \boldsymbol{v}) + \ldots + |\boldsymbol{v}|^{2k} H_0(P_{2k}, \boldsymbol{v}) \tag{50}$$

и любой полином $P_{2k+1}(\boldsymbol{v})$ представим в виде

$$P_{2k+1}(\boldsymbol{v}) = H_{2k+1}(P_{2k+1}, \boldsymbol{v}) + |\boldsymbol{v}|^2 H_{2k-1}(P_{2k+1}, \boldsymbol{v}) + \ldots + |\boldsymbol{v}|^{2k} H_1(P_{2k+1}, \boldsymbol{v}), \tag{51}$$

где $H_\nu(P_\mu)$ однородный гармонический полином порядка ν однозначно определяющийся по P_μ.

Отсюда, в частности, следует, что

$$H_0(P_{2k+1}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

Кроме того, для любого однородного гармонического многочлена H_k порядка k верно тождество

$$\Delta(|\boldsymbol{v}|^{2m} H_k(\boldsymbol{v})) = 2m(2m + n + 2k - 2)|\boldsymbol{v}|^{2m-2} H_k(\boldsymbol{v}). \tag{52}$$

Действительно,

$$\Delta(|\boldsymbol{v}|^{2m} H_k(\boldsymbol{v})) = 2m(2m + n - 2)|\boldsymbol{v}|^{2m-2} H_k(\boldsymbol{v}) +$$
$$+ 2 \cdot 2m|\boldsymbol{v}|^{2m-2}(\nabla H_k(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) + |\boldsymbol{v}|^{2m} \Delta H_k(\boldsymbol{v}).$$

Остается учесть, что в силу тождества Эйлера (44)

$$(H_k(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = kH_k(\boldsymbol{v})$$

и так как $H_k(\boldsymbol{v})$ гармонический полином, то $\Delta H_k(\boldsymbol{v}) = 0$.

Из этого равенства и из (50), в частности, следует, что

$$\Delta^k P_{2k}(\boldsymbol{v}) = \frac{(2k)!!(n - 2 + 2k)!!}{(n-2)!!} H_0(P_{2k}).$$

Учитывая теперь, что $\Delta^k P_{2k}(\boldsymbol{v})$ есть величина постоянная, получаем

$$H_0(P_{2k}) = \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n - 2 + 2k)!!} \Delta^k P_{2k}|_0,$$

следовательно,

$$H_0(Q_m) = \sum_{k=0}^{[m/2]} H_o(P_{2k}) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n - 2 + 2k)!!} \Delta^k P_{2k}|_0,$$

кроме того,

$$\Delta^k Q_m|_0 = \Delta^k P_{2k}|_0,$$

что вместе с (46) и завершает доказательство теоремы 4.

Из равенства (49) и теоремы 4 следует, что

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u} = \sigma(\mathbb{S}_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n - 2 + 2k)!!} \Delta^k f|_0. \tag{53}$$

Обозначим через $\sigma(\boldsymbol{y})$ площадь поверхности $\boldsymbol{y}$, а через $V(\boldsymbol{y})$ объем тела, ограниченного замкнутой, без самопересечений поверхностью $\boldsymbol{y}$.

Теорема 5. *Пусть* $\rho(\boldsymbol{u})$ *сужение полинома* $\rho(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_n)$ *на сферу* $\mathbb{S}_n$, *тогда*

$$\sigma(\boldsymbol{x}(\rho)) = \sigma(\mathbb{S}_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k r(\rho)|_0 \tag{54}$$

и

$$V(\boldsymbol{x}(\rho)) = \sigma(\mathbb{S}_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k (\rho r(\rho))|_0. \tag{55}$$

Доказательство. Равенство (54) сразу следует из (53) и (49). Докажем равенство (55). Согласно формуле Гаусса-Остроградского (см., например, [10]), если V – односвязное множество с кусочно-гладкой границей ∂V и заданное векторное поле $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{v})$ непрерывно дифференцируемо на V, то

$$\int_V div\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{w} = \int_{\partial V} (\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{dv}), \tag{56}$$

где, как обычно,

$$div\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}^i_{w^i}(\boldsymbol{w})$$

– дивергенция векторного поля $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{w})$, а $\boldsymbol{dv}$– векторный элемент площади поверхности ∂V.

Пусть $\mathbb{T}(\rho)$ – тело, ограниченное выпуклой поверхностью $\boldsymbol{x}(\rho)$, тогда, полагая в (56)

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{w}) = \Big(\frac{\boldsymbol{w}}{n}, \frac{\boldsymbol{w}}{n}, \dots, \frac{\boldsymbol{w}}{n}\Big)$$

и, учитывая, что при этом

$$div\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = 1,$$

получим

$$V(\boldsymbol{x}(\rho)) = \int_{\mathbb{T}(\rho)} d\boldsymbol{v} = \frac{1}{n} \int_{\boldsymbol{x}(\rho)} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{dv}).$$

Кроме того, из теоремы 1 следует, что для $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{u}\, r(\rho, \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}$$

и, следовательно,

$$V(\boldsymbol{x}(\rho)) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_n} (\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) r(\rho, \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}.$$

Отсюда и из равенства (24) получаем

$$V(\boldsymbol{x}(\rho)) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_n} \rho(\boldsymbol{u}) r(\rho, \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}.$$

Далее остается воспользоваться равенством (53).

Хорошо известно, (см., например, [8], стр.160), что на сфере $\mathbb{S}_n$ существует система из

$$\xi_{k,n} = C^k_{n+k-1} - C^{k-2}_{n+k-3}$$

ортонормированных гармоник k-го порядка

$$R_{n,k,1}(\boldsymbol{u}), \dots, R_{n,k,\xi_{n,k}}(\boldsymbol{u}),$$

называемых частичными гармониками k-го порядка. В частности, можно положить

$$R_{n,1,k}(\boldsymbol{u}) = u^i. \tag{57}$$

Эти гармоники ортогональны друг другу на сфере и для любой непрерывной на $\mathbb{S}_n$ функции справедливо разложение в ряд Фурье по этой системе гармоник

$$f(\boldsymbol{u}) = R_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\xi_{n,k}} a_{k,i}(f) R_{n,k,i}(\boldsymbol{u}),$$

где $a_{k,i}(f)$ коэффициенты Фурье.

В частности, если

$$\rho(\boldsymbol{u}) = R_0 + R_1(\boldsymbol{u}) + R_2(\boldsymbol{u}),$$
$$R_1(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}), R_2(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}A),$$

где $A = \{a_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{n,n}$, $a_{i,j} = a_{j,i}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0$, $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, \dots, a^n)$, то равенство (48) примет вид

$$\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = R_0 \boldsymbol{u} - R_2(\rho, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{a} + \nabla R_2(\boldsymbol{u}) \tag{58}$$

или, что то же

$$\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = R_0 u^i + a^i + \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u^j - u^i \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u^i u^j = \tag{59}$$
$$= (R_0 - R_2(\boldsymbol{u})) u^i + \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u^j + a^i.$$

При этом

$$\lambda = R_0 - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}A) = R_0 - R_2(\boldsymbol{u})$$

и равенство (39) примет вид

$$r(\boldsymbol{x}(\rho), \boldsymbol{u}) = - \begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & a_{1,1} + R_0 - R_2(\boldsymbol{u}) & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ u^2 & a_{2,1} & a_{2,2} + R_0 - R_2(\boldsymbol{u}) & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & \\ u^n & a_{n,1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n} + R_0 - R_2(\boldsymbol{u}) \end{vmatrix}, \tag{60}$$

Выберем на сфере $\mathbb{S}_n$ произвольную точку $\boldsymbol{a}$. Существует единственная (с точностью до знака) гармоника k-го порядка $R^a_{n,k}(\boldsymbol{u})$ с нормой в L_2 равной единице и такая, что при любом повороте сферы оставляющем на месте точку $\boldsymbol{a}$, она переходит сама в себя. Такая гармоника называется зональной гармоникой. При этом будем говорить, что зональная гармоника инвариантна относительно группы вращений $SO_a(n)$.

Из предложения 1 и теоремы 3 следует, что для того, чтобы строго выпуклая гладкая поверхность была инвариантна относительно группы вращений $SO_a(n)$ необходимо и достаточно, она была представима в виде (42), и функция $\rho(\boldsymbol{u})$ имела вид

$$\rho(\boldsymbol{u}) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k R^a_{n,k}(\boldsymbol{u}). \tag{61}$$

Если плотность $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ поверхности $\boldsymbol{x}$в точке $\boldsymbol{u}$численно равна гауссовой кривизне поверхности $\boldsymbol{x}$в точке $\boldsymbol{u}$, то центр тяжести такой поверхности называют точкой Штейнера или естественным центром поверхности.

Теорема 6. *Пусть $\rho \in L_2(\mathbb{S}_n)$, (46) ее разложение в гармонический ряд и $H_1(\rho, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{a}(\rho), \boldsymbol{u})$.*

Тогда $\boldsymbol{a}(\rho)$ есть точка Штейнера выпуклой поверхности (42).

Доказательство. Исходя из определения точки Штейнера, ее координаты $x_0^k(\rho)$ определяются равенствами

$$x_0^k(\rho) = \frac{\int_{x(\rho)} x^k(\rho, \boldsymbol{v}) k(\rho, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v}}{\int_{x(\rho)} k(\rho, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v}}.$$

Отсюда, из (43) и теоремы 1 получаем

$$\int_{x(\rho)} x^k(\rho, \boldsymbol{v}) k(\rho, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v} = \int_{\mathbb{S}_n} x^k(\rho, \boldsymbol{u}) k(\rho, \boldsymbol{u}) \frac{1}{k(\rho, \boldsymbol{u})} d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{S}_n} x^k(\rho, \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u} =$$

$$= \int_{\mathbb{S}_n} \big((\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\, u^k + \rho_{u^k}(\boldsymbol{u}) \big)\, d\boldsymbol{u}. \tag{62}$$

Если (46) разложение функции $\rho(\boldsymbol{u})$ в ряд по гармоникам, то в силу тождества Эйлера

$$(\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu H_\nu(\rho, \boldsymbol{u}),$$

и, следовательно,

$$\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = H_0(\rho) + \sum_{\nu=2}^{\infty} (1-\nu) H_\nu(\rho, \boldsymbol{u}).$$

Так как u^k есть частичная гармоника первого порядка, то из последнего соотношения и из равенства (45) следует

$$\int_{\mathbb{S}_n} (\rho(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\, u^k \, d\boldsymbol{u} = 0.$$

Кроме того, $\partial H_k / \partial u^i$ при $k \geq 2$ есть гармоника не нулевого порядка или тождественный ноль. Таким образом

$$\int_{\mathbb{S}_n} \frac{\partial H_k(\boldsymbol{u})}{\partial u^i} d\boldsymbol{u} = 0 \quad (k \geq 2)$$

и

$$\int_{\mathbb{S}_n} \frac{\partial H_1(\boldsymbol{u})}{\partial u^i} d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{S}_n} a^i(\rho) d\boldsymbol{u} = a^i(\rho) \sigma(\mathbb{S}_n).$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{S}_n} x^k(\rho, \boldsymbol{u}) k(\rho, \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u} = a^i(\rho) \sigma(\mathbb{S}_n). \tag{63}$$

Кроме того, из равенства (43) и теоремы 1 следует, что

$$\int_{x(\rho)} k(\rho, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v} = \int_{\mathbb{S}_n} d\boldsymbol{u} = \sigma(\mathbb{S}_n).$$

Отсюда и из (63) сразу получаем утверждение теоремы.

4. В теории кулачковых механизмов функцию $\rho(\boldsymbol{u})|_{\mathbb{S}_n}$, определенную с точностью до константы, называют функцией движения толкателя, а задачу построения кулачкового механизма, обеспечивающего наперед заданную функцию движения толкателя – задачей синтеза кулачковых механизмов.

Из предложения 2, в частности, следует, что какова бы ни была гладкая функция движения толкателя $\rho_1(\boldsymbol{u})$ можно сконструировать пространственный кулачковый механизм (положив $\rho(\boldsymbol{u}) = \rho_1(\boldsymbol{u}) + \rho_0$, где ρ_0 любое число больше чем $-\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{S}_2} r(\rho_1, \boldsymbol{u})$) обеспечивающий функцию движения $\rho_1(\boldsymbol{u})$.

Пусть $n = 2$, $\rho(\boldsymbol{u}) = \rho(u^1, u^2)$, $u^1 = \cos\varphi$ и $u^2 = \sin\varphi$. Тогда

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho_{u^1}\sin\varphi + \rho_{u^2}\cos\varphi = -\rho_{u^1}u^2 + \rho_{u^2}u^1$$

и, следовательно,

$$\rho_{u^1} - \rho_{u^1}(u^1)^2 - \rho_{u^2}u^1u^2 =$$
$$= \rho_{u^1} - \rho_{u^1}(u^1)^2 - u^2\left(\frac{d\rho}{d\varphi} + \rho_{u^2}u^2\right) = \frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi.$$

Так, что

$$x(\rho,\varphi) = \rho(u^1,u^2) - \rho_{u^1}(u^1,u^2)(u^1)^2 - \rho_{u^2}(u^1,u^2)u^1u^2 + \rho_{u^1}(u^1,u^2) =$$
$$= \rho(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi - \frac{d\rho(\cos\varphi,\sin\varphi)}{d\varphi}\sin\varphi.$$

Таким образом для $n = 2$ соотношение (42) примет вид

$$\begin{cases} x = \theta(\varphi)\cos\varphi - \theta'(\varphi)\sin\varphi, \\ y = \theta(\varphi)\sin\varphi + \theta'(\varphi)\cos\varphi, \end{cases} \tag{64}$$

где $\theta(\varphi) = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)$. При этом

$$r(\theta,\varphi) = \theta(\varphi) + \theta''(\varphi),$$

или если

$$\theta(\varphi) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos k(\varphi - \varphi_k),$$

то

$$r(\theta,\varphi) = d_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(1-k^2)d_k\cos k(\varphi-\varphi_k). \tag{65}$$

Кроме того, если $k(\rho,\varphi)$– кривизна кривой (64), то

$$k(\theta,\varphi) = \frac{1}{r(\theta,\varphi)} \tag{66}$$

и если $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0$ $(\varphi \in (0, 2\pi))$, то

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))d\varphi. \tag{67}$$

В работе [2] доказано более общее утверждение. Формулировке этого утверждения предпошлем дополнительные построения.

Пусть Θ_n — множество промежутков $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ из $[0, 2\pi]$ таких, что

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n.$$

Через Ψ_m обозначим m-мерный вектор $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ такой, что

$$\varphi_k \in (\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i, \beta_i) \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

и

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_m.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_m = \{l_k\}_{k=1}^m$ m-мерный вектор с положительными координатами.

Кроме того, пусть $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ – класс замкнутых выпуклых жордановых кривых $\Gamma(t)$ имеющих следующие свойства:

- если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом α_i, то при переходе через эту точку угол наклона принимает значение β_i;
- если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом φ_k, то касательная будет совпадать с участком кривой длины l_k.

Здесь считаем, что направление касательной в точке $(x(t), y(t))$ совпадает с направлением вектора $(x'(t), y'(t))$.

Каждому набору $(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ поставим в соответствие класс $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ 2π-периодических кусочно-дифференцируемых функций $\theta(\varphi)$, определенный следующим образом:

- производная $\theta'(\varphi)$ непрерывна во всех точках промежутка $[0, 2\pi]$, кроме точек φ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, в которых имеет место соотношение
$$\theta'(\varphi_k + 0) - \theta'(\varphi_k - 0) = l_k,$$
- производная $\theta^{((2))}(\varphi)$ почти всюду существует, функция $\theta(\varphi) + \theta^{((2))}(\varphi)$ не изменяет знак на периоде, обращается в ноль при $\varphi \in [\alpha_k, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и на множестве $(\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$ почти всюду отлична от нуля.

Отсюда сразу получаем следующее утверждение:

Теорема 7. *Кривая $\Gamma(\theta)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде (64), где функция $\theta(\varphi)$ лежит в классе $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, \mathfrak{L}_m)$.*

Рассмотрим еще один важный частный случай – уравнение поверхности в $\mathbb{R}_3$ в географических координатах. Ранее такая задача рассматривалась в работе [4].

Следствие 3. *Пусть $n = 3$ и $\rho^*(\boldsymbol{u}) = \rho(u^1, u^2, u^3)$, где*

$$\begin{cases} u^1 = \cos\varphi \sin\psi, \\ u^2 = \sin\varphi \sin\psi, \\ u^3 = \cos\psi, \end{cases} \tag{68}$$

тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$\begin{cases} x_1(\varphi, \psi) = \rho^*(\varphi, \psi) \sin\psi \cos\varphi + \rho^*_\psi(\varphi, \psi) \cos\psi \cos\varphi - \rho^*_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \\ x_2(\varphi, \psi) = \rho^*(\varphi, \psi) \sin\psi \sin\varphi + \rho^*_\psi(\varphi, \psi) \cos\psi \sin\varphi + \rho^*_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\cos\varphi}{\sin\psi}, \\ x_3(\varphi, \psi) = \rho^*(\varphi, \psi) \cos\psi - \rho^*_\psi(\varphi, \psi) \sin\psi. \end{cases} \tag{69}$$

Действительно, для $\rho^*(\boldsymbol{u}) = \rho(u^1, u^2, u^3)$ равенство (2) примет вид

$$\begin{cases} x_1(\boldsymbol{u}) = \rho^*(\boldsymbol{u}) u^1 + \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) - u^1 \left(\rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) u^1 + \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) u^2 + \rho^*_{u^3}(\boldsymbol{u}) u^3\right), \\ x_2(\boldsymbol{u}) = \rho^*(\boldsymbol{u}) u^2 + \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) - u^2 \left(\rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) u^1 + \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) u^2 + \rho^*_{u^3}(\boldsymbol{u}) u^3\right), \\ x_3(\boldsymbol{u}) = \rho^*(\boldsymbol{u}) u^3 + \rho^*_{u^3}(\boldsymbol{u}) - u^3 \left(\rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) u^1 + \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) u^2 + \rho^*_{u^3}(\boldsymbol{u}) u^3\right). \end{cases} \tag{70}$$

С другой стороны,

$$\rho^*_\varphi(\varphi, \psi) = -\rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) \sin\psi \sin\varphi + \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) \sin\psi \cos\varphi,$$

$$\rho^*_\psi(\varphi, \psi) = \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) \cos\psi \cos\varphi + \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) \cos\psi \sin\varphi - \rho^*_{u^3}(\boldsymbol{u}) \sin\psi.$$

Отсюда получаем

$$(71)\qquad \rho^*_{u^2}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sin\psi\cos\varphi}\left(\rho^*_\varphi(\varphi,\psi) + \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\sin\psi\sin\varphi\right),$$

$$(72)\qquad \rho^*_{u^3}(\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\sin\psi}\left(\rho^*_\psi(\varphi,\psi) - \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\frac{\cos\psi\sin\varphi}{\sin\psi\cos\varphi} - \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right).$$

Подставляя полученные соотношения в правую часть первого уравнения (70), получаем

$$x_1 = \rho^*(\boldsymbol{u})u^1 + \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})(1-(u^1)^2) - u^1u^2\frac{1}{\sin\psi\cos\varphi}\left(\rho^*_\varphi(\varphi,\psi) + \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\sin\psi\sin\varphi\right) +$$
$$+u^1u^3\frac{1}{\sin\psi}\left(\rho^*_\psi(\varphi,\psi) - \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\frac{\cos\psi\sin\varphi}{\sin\psi\cos\varphi} - \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right).$$

Отсюда и из (68) вытекает соотношение

$$x_1 = \rho^*(\varphi,\psi)\cos\varphi\sin\psi + \rho^*_\psi(\varphi,\psi)\cos\varphi\cos\psi - \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\left(\sin\psi\sin\varphi + \frac{\cos^2\psi\sin\varphi}{\sin\psi}\right) =$$
$$= \rho^*(\varphi,\psi)\sin\psi\cos\varphi + \rho^*_\psi(\varphi,\psi)\cos\psi\cos\varphi - \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Подставляя теперь соотношения (71) и (72) в правую часть второго уравнения (70) и проводя аналогичные преобразования, получаем

$$x_2 = \rho^*(\boldsymbol{u})u^2 + \frac{1-(u^2)^2}{\sin\psi\cos\varphi}\left(\rho^*_\varphi(\varphi,\psi) + \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\sin\psi\sin\varphi\right) -$$
$$-\rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})u^1u^2 + \frac{u^2u^3}{\sin\psi}\left(\rho^*_\psi(\varphi,\psi) - \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\frac{\cos\psi\sin\varphi}{\sin\psi\cos\varphi} - \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right) =$$
$$= \rho^*(\varphi,\psi)\sin\varphi\sin\psi + \rho^*_\psi(\varphi,\psi)\cos\psi\sin\varphi -$$
$$-\rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\left(\frac{\cos^2\psi\sin^2\varphi}{\sin\psi\cos\varphi} - \frac{1+\sin^2\psi\sin^2\varphi}{\sin\psi\cos\varphi}\right) =$$
$$= \rho^*(\varphi,\psi)\sin\psi\sin\varphi + \rho^*_\psi(\varphi,\psi)\cos\psi\sin\varphi + \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\frac{\cos\varphi}{\sin\psi}.$$

Наконец, подставляя соотношения (71) и (72) в правую часть последнего уравнения (70), после аналогичных преобразований, получаем

$$x_3 = \rho^*(\boldsymbol{u})u^3 + \frac{1-(u^3)^2}{\sin\psi}\left(\rho^*_\psi(\varphi,\psi) - \rho^*_\varphi(\varphi,\psi)\frac{\cos\psi\sin\varphi}{\sin\psi\cos\varphi} - \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right) -$$
$$-u^1u^3\rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u}) - \frac{u^2u^3}{\cos\varphi\sin\psi}\left(\frac{\partial\rho^*(\varphi,\psi)}{\partial\varphi} + \rho^*_{u^1}(\boldsymbol{u})\sin\varphi\sin\psi\right) =$$
$$= \rho^*(\varphi,\psi)\cos\psi - \rho^*_\psi(\varphi,\psi)\sin\psi,$$

что и завершает доказательство следствия 3.

Как и для случая $n = 2$, так и для произвольного n ограничения на функцию $\rho(\boldsymbol{u})$ можно ослабить. Например, если в некоторой области $\Re \in \mathbb{R}_n$ выполняется равенство

$$r(\rho, \boldsymbol{u}) = 0,$$

то можно показать, что в этом случае найдется точка $\boldsymbol{c}_0$ такая, что

$$(73)\qquad \rho(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{u}),$$

при этом точка $\boldsymbol{c}_0$ лежит на поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ и для $\boldsymbol{u} \in \Re$ опорная плоскость задается уравнением

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{u}) = 0, \tag{74}$$

то есть $\boldsymbol{c}$является конической особой точкой поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$. Верно и обратное утверждение: если $\boldsymbol{c}$коническая особая точка поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$, то ее опорная плоскость в точке $\boldsymbol{u}$имеет вид (74) и опорная функция $\rho(\boldsymbol{u}) = |(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{u})|$.

Аналогично можно показать соответствие между ребристыми особыми точками поверхности и равенством нулю радиуса кривизны $r(\rho, \boldsymbol{u})$ (впрочем, оно хорошо просматривается из рисунков 1, 2).

Точки разрыва производной функции $\rho(\boldsymbol{u})$ характеризуют "прилипание"выпуклой поверхности к опорной плоскости. При тех $\boldsymbol{u}$при которых $\rho(\boldsymbol{u})$ не является дифференцируемой, но такова, что односторонние производные $\rho'_a(\boldsymbol{u} \pm 0\boldsymbol{a})$ в любом направлении $\boldsymbol{a}$существуют, часть поверхности, которая совпадает со своей опорной плоскостью нужно воспринимать как часть опорной плоскости, ограниченную краем пересечения поверхности и опорной плоскости. Вид края тесно связан с функцией

$$\ell_{\rho,u}(\boldsymbol{a}) = \rho'_a(\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{a}) - \rho'_a(\boldsymbol{u} - 0\boldsymbol{a}).$$

Край области "прилипания"может содержать в себе, в частности, конические или ребристые особые точки. В этом случае в соответствующих областях $\boldsymbol{u}$поверхность представима в виде (42), где $\rho(\boldsymbol{u})$ имеет вид (73).

Как обычно, ε-коридором $\mathbf{K}_\varepsilon(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$ поверхности $\boldsymbol{y}$назовем объединение всех шаров B_n^ε радиуса ε с центрами, лежащими на $\boldsymbol{y}$.

Через $\Re(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ обозначим наименьшее значение ε, при котором $\boldsymbol{y} \in \mathbf{K}_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, то есть

$$\Re(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min\{\varepsilon : \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) \in \mathbf{K}_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\}.$$

При этом будем говорить, что поверхность $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ находится от поверхности $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ на расстоянии $\Re(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Заметим, что таким образом введенное расстояние не является коммутативным.

Предложение 4. *Если поверхности $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$гладкие строго выпуклые и $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ их опорные функции таковы, что*

$$\|\rho(\boldsymbol{x}) - \rho(\boldsymbol{y})\|_{C(\mathbb{R}_n)} = \max_{u \in \mathbb{S}_n} |\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})| = \varepsilon,$$

то при достаточно малых ε справедливо соотношение

$$\Re(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Ясно, что если

$$\|\rho(\boldsymbol{x}) - \rho(\boldsymbol{y})\|_{C(\mathbb{R}_n)} = \varepsilon,$$

то для всех $\boldsymbol{u}\in \mathbb{S}_n$

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \varepsilon \leq \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \varepsilon.$$

В силу предложения 3, вытекает, что поверхность $\boldsymbol{y}$лежит между эквидистантами $\boldsymbol{x}_\varepsilon^-(\rho, \boldsymbol{u})$ и $\boldsymbol{x}_\varepsilon^+(\rho, \boldsymbol{u})$.

В другом виде связь между аппроксимацией опорных функций в равномерной метрике и аппроксимацией соответствующих выпуклых множеств в метрике Хаусдорфа приведена, например, в [6] стр. 144.

Представление (42) и теорема 4 дают возможность аппроксимировать выпуклые поверхности. Для этого нужно решить задачу об аппроксимации (в равномерной метрике) функции $\rho_\nu(\boldsymbol{u})$ (на сфере $\mathbb{S}_n$ или в области, содержащей сферу) гладкими функциями, которые на каждой ячейке разбиения имеют, например, вид

$$\rho_\nu(\boldsymbol{u}) = a_{0,\nu} + (a_{1,\nu}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}, a_{2,\nu}\boldsymbol{u})$$

и $\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0$.

Тогда соответствующая выпуклая поверхность будет аппроксимирована выпуклыми гладкими поверхностями склеенными из кусков, которые на малых клетках разбиения поверхности сферы представимы в виде

$$\boldsymbol{x}(\rho_\nu, \boldsymbol{u}) = (\rho_\nu(\boldsymbol{u}) - (\nabla\rho_\nu(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}))\boldsymbol{u} + \nabla\rho_\nu(\boldsymbol{u}).$$

5. Рассмотрим одну важную задачу связанную с геометрией выпуклых тел. Пусть задана фиксированная плоскость π_u с нормальным вектором $\boldsymbol{u}$. Найдем проекцию выпуклой поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ на эту плоскость.

Теорема 8. *Пусть $\boldsymbol{u}$– произвольная точка сферы, тогда уравнение границы проекции выпуклой поверхности на плоскость с нормальным вектором $\boldsymbol{u}$, с точностью до параллельного сдвига вдоль вектора $\boldsymbol{u}$, имеет вид $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{w})|_{\mathbb{S}_{n,u}}$ где $\mathbb{S}_{n,u} = \{w \in \mathbb{S}_n, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = 0\}$.*

Ясно, что любая выпуклая поверхность есть внутренняя огибающая семейства своих опорных плоскостей. Таким образом, проекция выпуклой поверхности в $\mathbb{R}_n$ есть выпуклая поверхность в $\mathbb{R}_{n-1}$, которая является огибающей своих опорных плоскостей, получающихся посредством пересечения опорной плоскости перпендикулярной к поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ с исходной поверхностью π_u.

Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{v}$ортогональный $\boldsymbol{u}$и проведем опорную плоскость $\pi_v(\rho)$ поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ с нормальным вектором $\boldsymbol{v}$. Проекция $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ на плоскость π_u есть сдвиг проекции поверхности на плоскость $\pi_v(\rho)$ вдоль вектора $\boldsymbol{u}$, поэтому достаточно найти проекцию поверхности $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ на плоскость $\pi_v(\rho)$.

Опорной функцией границы проекции на плоскость $\pi_v(\rho)$ есть расстояние от проекции начала координат на эту плоскость до гиперплоскости пересечения опорных плоскостей с нормальными векторами $\boldsymbol{u}$и $\boldsymbol{v}$. Гиперплоскость пересечения опорных плоскостей определяется уравнениями

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}), \\ (\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{v}), \end{cases} \tag{75}$$

а проекция начала координат есть решение системы

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}, \\ (\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}). \end{cases} \tag{76}$$

Решая эту систему, получаем, что $\lambda = \rho(\boldsymbol{u})$ и координаты точки M – проекции начала координат на плоскость $\pi_v(\rho)$ приобретут вид

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}. \tag{77}$$

Расстояние от точки M до гиперплоскости пересечения опорных плоскостей с нормальными векторами $\boldsymbol{u}$и $\boldsymbol{v}$есть решение экстремальной задачи

$$d^2 = |\boldsymbol{x}^* - \tilde{\boldsymbol{x}}|^2 \to \min,$$

где $\boldsymbol{x}^*$– решение системы (75).

Данная задача эквивалентна экстремальной задаче на экстремум

$$d^2 = |\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}|^2 \to \min,$$

при условиях

$$(\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}), \tag{78}$$

$$(\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{v}). \tag{79}$$

Так как d^2 есть квадратичная форма и ограничения (78) и (79) линейны, то необходимые условия экстремума совпадают с достаточными. Для решения данной экстремальной задачи составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0 |\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}|^2 + \lambda_1((\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{u})) + \lambda_2((\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v}))$$

или, используя равенство (77),

$$L = \lambda_0 |\boldsymbol{x} - \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}|^2 + \lambda_1((\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{u})) + \lambda_2((\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v})).$$

Так как задача выпуклая, то не ограничивая общности рассуждений, можно считать $\lambda_0 = -1/2$. В этом случае

$$\nabla L = -(\boldsymbol{x} - \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) + \lambda_1 \boldsymbol{u} + \lambda_2 \boldsymbol{v}$$

и уравнение $\nabla L = 0$ перепишется в виде

$$\boldsymbol{x} = \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \lambda_1 \boldsymbol{u} + \lambda_2 \boldsymbol{v}. \tag{80}$$

Подставляя эти значения в (78) – (79), получаем

$$\begin{cases} \rho(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \lambda_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \lambda_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{u}), \\ \rho(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{v}). \end{cases}$$

Решая систему, находим $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \rho(\boldsymbol{v})$. Таким образом, используя равенство (80), координаты точки $\boldsymbol{x}^0$ определяются следующим образом

$$\boldsymbol{x}^0 = \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \rho(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

и

$$d^2 = |\boldsymbol{x}^0 - \tilde{\boldsymbol{x}}|^2 = |\rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \rho(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} - \rho(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}|^2 = |\rho(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}|^2 = \rho^2(\boldsymbol{v}),$$

то есть $d = \rho(\boldsymbol{v})$, что и завершает доказательство теоремы 8.

Выпуклая поверхность $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$) называется поверхностью равной ширины d, если расстояние между любыми ее опорными плоскостями $\pi_u(\boldsymbol{x})$ и $\pi_{-u}(\boldsymbol{x})$ равно d. Отметим, что поверхностью равной ширины может быть только выпуклая поверхность (см., например, [7]).

Теорема 9. *Для того, чтобы любая гладкая строго выпуклая поверхность была поверхностью равной ширины d, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (42) и для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$ выполнялось равенство*

$$\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u}) = d. \tag{81}$$

Утверждение теоремы следует из того, что в силу (21) плоскости $\pi_u(\boldsymbol{x})$ и $\pi_{-u}(\boldsymbol{x})$ задаются уравнениями $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u})$ и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = -\rho(-\boldsymbol{u})$ и того факта, что, в силу предложения 2, расстояние между этими плоскостями равно $\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(-\boldsymbol{u})$.

Если функция $\rho(\boldsymbol{u})$ непрерывна на сфере и

$$\rho(\boldsymbol{u}) = R_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\xi_{n,k}} a_{k,i}(\rho) R_{n,k,i}(\boldsymbol{u})$$

ее разложение в гармонический ряд, то учитывая тот факт, что при нечетном k все $R_{n,k,i}(\boldsymbol{u})$ нечетные, а при четном k – четные, заключаем, что равенство (81) выполняется тогда и только тогда, когда $a_{k,i}(\rho) = 0$ для всех i и нечетных k.

Таким образом, для того чтобы поверхность была поверхностью равной ширины $2R_0(\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (42), где функция ρ имеет разложение в гармонический ряд

$$\rho(\boldsymbol{u}) = R_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\xi_{n,k}} a_{2k-1,i}(\rho) R_{n,2k-1,i}(\boldsymbol{u}).$$

Рассмотрим два примера поверхности равной ширины. Пусть

$$\rho_1(\boldsymbol{u}) = a + \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}^i.$$

Тогда при n нечетных $\boldsymbol{x}(\rho, \boldsymbol{u})$ будет поверхностью равной ширины $2a$ и при этом $\rho_{u^i u^j} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Следовательно (см. (40))

$$r(\rho, \boldsymbol{u}) = \lambda^{n-1}(\rho, \boldsymbol{u}) = \left(a + (n-1) \prod_{i=1}^{n-1} u^i \right)^{n-1}.$$

Минимальное значение a, при котором $r(\rho, \boldsymbol{u})|_{\mathbb{S}_n} \geq 0$ равно $(n-1)/(\sqrt{n})^n$.

Такая поверхность изображена на рисунке 1 при $n = 3$.

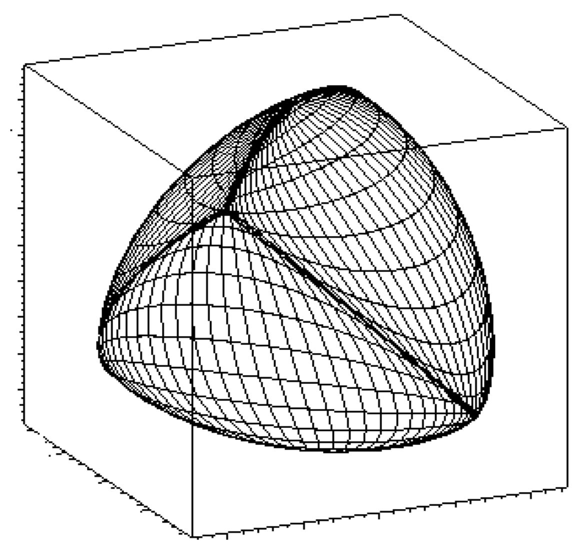

Рисунок 1.

На рисунке 2 изображена поверхность равной ширины для

$$\rho(\boldsymbol{u}) = a + (u^1)^2 (u^2)^2 u^3$$

при $a = 1$.

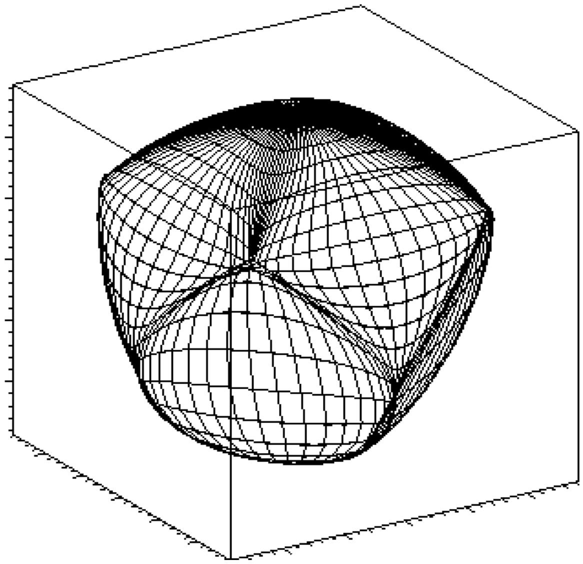

Рисунок 2.

Если $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ строго выпуклая поверхность, то для любых $n+1$ векторов $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$ таких, что

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = -\frac{1}{n} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \;\; \boldsymbol{u}_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \tag{82}$$

существует и единствен правильный симплекс, описанный возле поверхности $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$, грани которого имеют нормальные вектора $\boldsymbol{u}_i\,(i = 1, \ldots, n+1)$ соответственно.

Если линейные размеры симплекса не меняются для любого такого набора $\boldsymbol{u}_i$, то такую выпуклую поверхность будем называть $\Delta-$ поверхностью.

Теорема 10. *Для того, чтобы гладкая строго выпуклая поверхность была $\Delta-$ поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (42) и для любых $n+1$ векторов $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$ таких, что имеет место соотношение (82) и для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}_n$ выполнялось равенство*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho(\boldsymbol{u}_i) = d. \tag{83}$$

Доказательство.

Вначале рассмотрим вспомогательную задачу

Пусть $\boldsymbol{u}_i = \{u_i^j\}_{j=1}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ произвольный набор линейно независимых векторов из $\mathbb{S}_n$ и $M^* \in \mathbb{R}_n$ точка пересечения плоскостей $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i) = c_i$, тогда расстояние $d(M^*, \pi_{n+1})$ от точки M^* до плоскости π_{n+1}, определяется соотношением

$$d(M^*, \pi_{n+1}) = \left| \frac{A_c(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n+1})}{[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]} \right|,$$

где

$$A_c(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{n+1}) = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n & c_1 \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n & c_2 \\ & & \dots & & \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^n & c_n \\ u_{n+1}^1 & u_{n+1}^2 & \dots & u_{n+1}^n & c_{n+1} \end{vmatrix}$$

и

$$[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n] = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n \\ & & \dots & \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Действительно, так как

$$d(M^*,\pi_{n+1}) = |(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}_{n+1}) - c_{n+1}| = \left|\sum_{i=1}^n x_i^* u_{n+1}^i - c_{n+1}\right|$$

то согласно правилу Крамера

$$x_i^* = \frac{[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{i-1},c^*,\boldsymbol{u}_{i+1},\dots,\boldsymbol{u}_n]}{[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n]} \quad (c^* = (c_1,\dots,c_n)),$$

получаем

$$d(M^*,\pi_{n+1}) = \left|\frac{\sum_{i=1}^n[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{i-1},c^*,\boldsymbol{u}_{i+1},\dots,\boldsymbol{u}_n]u_{n+1}^i - c_{n+1}[u_1,\dots,u_n]}{[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n]}\right| =$$

$$= \left|\frac{A_c(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{n+1})}{[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n]}\right|.$$

Пусть $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$ $(i = 1,\dots,n)$ набор векторов и $\boldsymbol{u}_{n+1} \in \mathbb{S}_n$ не равен ни одному из них, тогда поверхность $\boldsymbol{x}(\rho,\boldsymbol{u})$ вписана в симплекс с гранями

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i) = \rho(\boldsymbol{u}_i) \quad (i = 1,\dots,n+1)$$

и согласно предыдущему, высота, опущенная из точки пересечения плоскостей $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i) = \rho(\boldsymbol{u}_i)$ $(i = 1,\dots,n)$ на плоскость $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{n+1}) = \rho(\boldsymbol{u}_{n+1})$ будет равна

$$d_{n+1} = \left|\frac{A_\rho(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{n+1})}{[\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n]}\right|,$$

где $\rho = \rho(\rho(u_1),\rho(u_2),\dots,\rho(u_{n+1}))$.

Если симплекс правильный $((\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j) = -n^{-1}$ $(i,j = 1,\dots,n, i \neq j))$ и $\boldsymbol{u}_{n+1} = -\sum_{i=1}^n \boldsymbol{u}_i$, то

$$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n] = \frac{1}{n!}$$

есть объем симплекса (в предположении, что векторы $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n$ образуют правую тройку) и

$$A_\rho(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_{n+1}) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n+1}\rho(\boldsymbol{u}_i),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Покажем, что для $n = 3$ функция

$$\rho(\boldsymbol{u}) = c_0 + (\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}C), \tag{84}$$

где c_0 – скаляр, $\boldsymbol{c}_1 \in \mathbb{R}_3$ и C самосопряженная матрица третьего порядка, удовлетворяет условию (83) тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{3} c_{i,i} = 0$, то есть когда она является гармоникой.

Действительно, в силу предложения 2, равенство (83) достаточно проверить для любого конкретного набора элементов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in \mathbb{S}_3$ ($\boldsymbol{u}_4 = -\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{u}_i$) таких, что $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = -1/3$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Для $\rho(\boldsymbol{u}) = c_0 + (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{u})$ теорема 10 выполняется. Остается убедиться в справедливости теоремы для

$$\rho(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}C) = \sum_{i,j=1}^{3} c_{i,j} u^i u^j.$$

Векторы

$$\boldsymbol{u}_1 = \left(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right); \boldsymbol{u}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right); \boldsymbol{u}_3 = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); \boldsymbol{u}_4 = (1, 0, 0)$$

удовлетворяют нашим условиям и

$$\rho(\boldsymbol{u}_1) = \frac{1}{9}c_{1,1} + \frac{2}{3}c_{2,2} + \frac{2}{9}c_{3,3} + (c_{1,2} + c_{2,1})\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + (c_{1,3} + c_{3,1})\frac{\sqrt{2}}{9} - (c_{2,3} + c_{3,2})\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$\rho(\boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{9}c_{1,1} + \frac{2}{3}c_{2,2} + \frac{2}{9}c_{3,3} + (c_{1,2} + c_{2,1})\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + (c_{1,3} + c_{3,1})\frac{\sqrt{2}}{9} + (c_{2,3} + c_{3,2})\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$\rho(\boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{9}c_{1,1} + \frac{8}{9}c_{3,3} - (c_{1,3} + c_{3,1})\frac{\sqrt{2}}{9},$$

$$\rho(\boldsymbol{u}_4) = c_{1,1}.$$

Таким образом, суммируя полученные выражения, получаем

$$\rho(\boldsymbol{u}_1) + \rho(\boldsymbol{u}_2) + \rho(\boldsymbol{u}_3) + \rho(\boldsymbol{u}_4) = \frac{4}{3}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}).$$

Остается заметить, что $\sum_{i=1}^{3} c_{i,i}$ одна из основных инвариантов поворота.

Рассмотрим два примера $\Delta-$ поверхностей. Пусть $\rho_3(\boldsymbol{u}) = a + u^1 u^2$, тогда в силу (40)

$$r(\rho, \boldsymbol{u}) = \lambda^{n-1}(\rho, \boldsymbol{u}) = (a - u^1 u^2)^{n-1}.$$

Минимальное значение a, при котором величина $r(\rho, \boldsymbol{u})$ будет неотрицательной на сфере, равна $a = 1/2$. На рисунке 3 изображена такая поверхность.

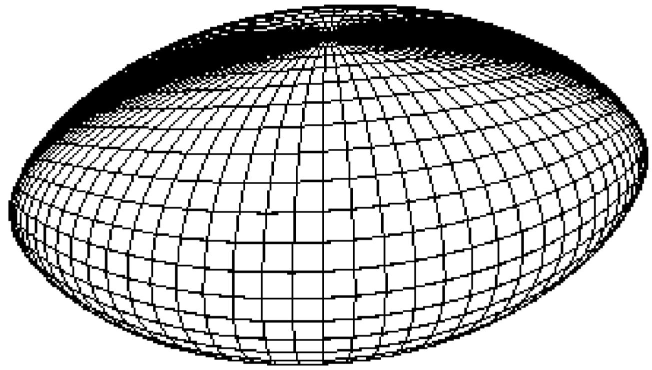

Рисунок 3.

Пусть, теперь

$$\rho(\boldsymbol{u}) = a + (u^1)^2 - (u^2)^2,$$

тогда, согласно замечанию 1, поверхность $\boldsymbol{x}(\rho)$ будет Δ – поверхностью и

$$r(\rho, \boldsymbol{u}) = (\lambda^2 - 4)(u^3)^2 = ((a - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2 - 4)(u^3)^2.$$

Минимальное значение a, при котором $r(\rho, \boldsymbol{u}) \geq 0$, равно 3. На рисунке 4 изображена такая поверхность.

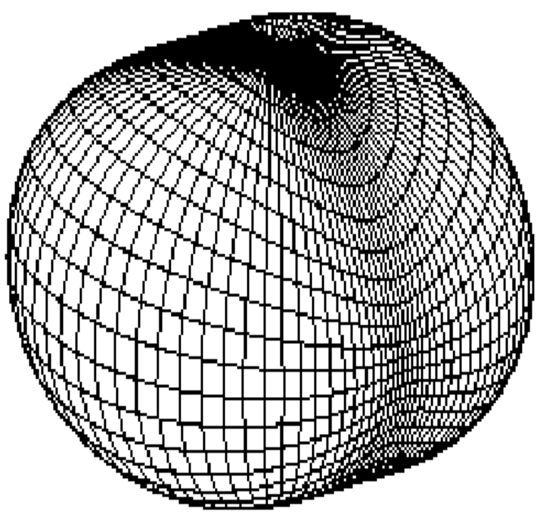

Рисунок 4.

Сфера обладает тем свойством, что сумма расстояний от ее центра до любых двух опорных плоскостей с фиксированным углом между нормальными векторами, есть величина постоянная. Естественно возникает вопрос – существуют ли выпуклые поверхности отличные от сферы, которые обладают этим свойством?

Непосредственно из следствия 1 вытекает следующее утверждение:

Предложение 5. *Для того, чтобы строго выпуклая гладкая поверхность обладала тем свойством, что сумма расстояний от начала координат до любых двух опорных плоскостей с фиксированным углом между нормальными векторами, есть величина постоянная, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (42) и функция* $\rho(\boldsymbol{u})$ *обладала следующим свойством: для любых векторов* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_n$ *таких, что* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k$ *выполнялось условие*

$$\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(\boldsymbol{v}) = d. \tag{85}$$

В частном случае для $n = 2$ это предложение будет иметь вид: для того, чтобы выпуклая кривая была такой, что чтобы сумма расстояний от начала координат до любых двух опорных прямых с фиксированным углом между нормальными векторами, была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы функция $\rho^*(\varphi)$ обладала следующим свойством: для любого φ

$$\rho^*(\varphi) + \rho^*(\pi - \varphi) = d.$$

Заметим, что для того, чтобы такая кривая существовала, необходимо и достаточно, чтобы угол φ был соизмерим с π.

Рассмотрим еще один частный случай, когда $k = 0$, то есть $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов Фурье n-го порядка не равен 0, то условие (85) не выполняется. Действительно, для того, чтобы равенство (85) выполнялось, необходимо чтобы гармоники первого порядка

$$H_1(\rho, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} c_{n,1,i}(\rho)\, u^i$$

удовлетворяли условию

$$H_1(\rho, \boldsymbol{u}) + H_1(\rho, \boldsymbol{v}) = d \quad ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0).$$

Но тогда, в частности, должны быть одинаковыми и величины

$$H_1(\rho, i^\mu) + H_1(\rho, i^\nu) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n),$$

то есть при всех μ, ν должны выполняться равенства

$$c_{n,1,\nu} + c_{n,1,\mu} = c_{n,1,1} + c_{n,1,2}.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда все $c_{n,1,\mu} = 0$.

Таким образом, если начало координат не совпадает с точкой Штейнера поверхности, то свойство (85) не выполняется ни для какой функции $\rho(\boldsymbol{u})$. Если же начало координат совпадает с точкой Штейнера поверхности, то при $k = 0$ этому условию удовлетворяет, например, функция $\rho(\boldsymbol{u}) = a + \rho_1(\boldsymbol{u})$, где

$$\rho_1(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} u^i\, u^j \quad (u^{n+i} = u^1). \tag{86}$$

Действительно, циклический полином (86) инвариантен относительно поворота и поэтому достаточно проверить, что условие

$$\rho(\boldsymbol{u}) + \rho(\boldsymbol{v}) = 0$$

выполняется для любой пары ортов, а этот факт очевиден.

Сфера обладает так же тем свойством, что расстояние от ее центра до гиперплоскости пересечения двух опорных плоскостей, нормальные векторы которых пересекаются под одним и тем же углом, постоянно.

Предложение 6. *Для того, чтобы строго выпуклая поверхность обладала тем свойством, что расстояние от ее центра до гиперплоскости пересечения двух опорных плоскостей, нормальные векторы которых пересекаются под одним и тем же углом есть величина постоянная, необходимо и достаточно, чтобы она была представлена в виде (42) и функция* $\rho(\boldsymbol{u})$ *обладала следующим свойством: для любых векторов* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{S}_n$ *таких, что* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k$ *выполнялось условие*

$$\rho^2(\boldsymbol{u}) + \rho^2(\boldsymbol{v}) - 2k\rho(\boldsymbol{u})\rho(\boldsymbol{v}) = (1-k^2)d. \tag{87}$$

Доказательство. Ясно, что гиперплоскость пересечения опорных плоскостей определяется следующим соотношением

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k \end{cases}$$

и, следовательно, расстояние от начала координат до этой гиперплоскости есть решение следующей экстремальной задачи:

$$|\boldsymbol{x}|^2 \to \min \tag{88}$$

при условии

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{u}) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v}) = 0. \end{cases} \tag{89}$$

В силу выпуклости функционала цели и линейности ограничений, функция Лагранжа этой экстремальной задачи может быть записана в виде

$$L = |\boldsymbol{x}|^2 - 2\lambda_1((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{u})) - 2\lambda_2((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v})).$$

В этом случае необходимое и достаточное условия экстремума примут вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \lambda_1 \boldsymbol{u} - \lambda_2 \boldsymbol{v} = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{u}) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) - \rho(\boldsymbol{v}) = 0. \end{cases}$$

Исключая $\boldsymbol{x}$и учитывая, что $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k$, отсюда сразу получаем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2\, k = \rho(\boldsymbol{u}) \\ \lambda_1\, k + \lambda_2 = \rho(\boldsymbol{v}). \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $\boldsymbol{x}^*$ есть решение экстремальной задачи (88), (89), то

$$\boldsymbol{x}^* = \lambda_1^* \boldsymbol{u} + \lambda_2^* \boldsymbol{v},$$

где

$$\lambda_1^* = \frac{\rho(\boldsymbol{u}) - \rho(\boldsymbol{v})k}{(1-k^2)^2}; \lambda_2^* = \frac{\rho(\boldsymbol{u})k - \rho(\boldsymbol{v})}{(1-k^2)^2}$$

при этом

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \frac{\rho^2(\boldsymbol{u}) + \rho^2(\boldsymbol{v}) - 2k\rho(\boldsymbol{u})\rho(\boldsymbol{v})}{(1-k^2)} = d,$$

что и заканчивает доказательство предложения 6.

В частности, если плоскости ортогональны, т.е. $k = 0$, то условие (87) примет вид

$$\rho^2(\boldsymbol{u}) + \rho^2(\boldsymbol{v}) = d, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

Рассмотрим еще одну подобную задачу. Сфера обладает свойством, что расстояние от ее центра до точки пересечения трех опорных плоскостей, нормальные векторы которых пересекаются под одним и тем же углом, постоянно. Возникает вопрос об описании выпуклых поверхностей обладающих этим же свойством. Имеет место следующее утверждение:

Предложение 7. *Для того, чтобы строго выпуклая гладкая поверхность обладала тем свойством, что расстояние от ее центра до точки пересечения n опорных плоскостей, нормальные векторы $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, которых таковы, что $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = k$, $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n,)$ $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$, есть величина постоянная, необходимо и достаточно, чтобы поверхность была представима в виде (42) и функция ρ обладала следующим свойством: для любых векторов $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$ таких, что $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = k$, $(i \neq j, i, j = 1, \ldots, n,)$ $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$ выполнялось равенство*

$$\frac{k\left(\sum_{i=1}^n \rho_{u^i}\right)^2 - (2k(n-1)+1)\sum_{j=1}^n \rho_{u^j}^2}{((n-1)k^2 - (n-2)k - 1)^n} = d.$$

Доказательство. В силу предложения 6, если $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ произвольные линейно независимые векторы $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{S}_n$, то точка их пересечения $\boldsymbol{x}^{**}$ есть решение системы

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i) = \rho(\boldsymbol{u}_i) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{90}$$

В силу линейной независимости векторов найдутся числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ такие, что

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n d_i \boldsymbol{u}_i.$$

подставляя в (90) и учитывая, что $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = k$, $i \neq j$, получаем

$$\left(\sum_{j=1}^n d_j \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_i\right) = \rho(\boldsymbol{u}_i) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

или $\boldsymbol{d}K = \rho$, где $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $\rho = (\rho(\boldsymbol{u}_1), \ldots, \rho(\boldsymbol{u}_n))$ и

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k & \ldots & k \\ k & 1 & \ldots & k \\ & & \ldots & \\ k & k & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

А так как

$$K^{-1} = -\frac{1}{((n-1)k^2 - (n-2)k - 1)^n} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -(n-2)k-1 & k & \dots & k \\ k & -(n-2)k-1 & \dots & k \\ & & \dots & \\ k & k & \dots & -(n-2)k-1 \end{pmatrix},$$

то решение $\boldsymbol{d}^*$ уравнения $\boldsymbol{d}K = \rho$ имеет вид

$$\boldsymbol{d}^* = \frac{1}{((n-1)k^2-(n-1)k-1)^n}\rho(\boldsymbol{u})\times$$

$$\times \begin{pmatrix} -(n-2)k-1 & k & \dots & k \\ k & -(n-2)k-1 & \dots & k \\ & & \dots & \\ k & k & \dots & -(n-2)k-1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|\boldsymbol{x}^*|^2 = \left|\sum_{i=1}^n d_i^* u^i\right| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i^* d_j^* (u^i, u^j) =$$

$$= (\boldsymbol{d}^*, \boldsymbol{d}^* K) = (\rho K^{-1}, \rho K^{-1} K) = (\rho, \rho K^{-1}) =$$

$$= \frac{k\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{u^i}\rho_{u^j} - (2k(n-1)+1)\sum_{j=1}^n \rho_{u^j}^2}{((n-1)k^2-(n-2)k-1)^n} =$$

$$= \frac{k\left(\sum_{i=1}^n \rho_{u^i}\right)^2 - (2k(n-1)+1)\sum_{j=1}^n \rho_{u^j}^2}{((n-1)k^2-(n-2)k-1)^n}.$$

Результаты статьи при $n = 2$ (то есть при описании выпуклых кривых) были получены А.Лигуном и А.Шумейко в работах [2] – [3]. Основные доказательства этой статьи были навеяны методами проецирования бесконечно удаленной точки, широко используемыми в теории машин и механизмов (см., например, [9]). Тот факт, что кривые вида (64) описывают весь класс выпуклых кривых, доказан с помощью предельного перехода. Была установлена взаимно однозначная связь между гладкими тригонометрическими сплайнами и гладкими кусочно-окружностными выпуклыми кривыми, а затем используя предельный переход было доказано, что любая выпуклая кривая имеет вид (64).

Аналогичный прием использовался в работе ([4]) для описания выпуклых поверхностей при $n = 3$ в географических координатах. При попытке использовать метод проектирования бесконечно удаленной точки в терминах направляющих косинусов авторы столкнулись с техническими сложностями. В связи с этим, был использован другой подход. Взяв за основу представление поверхности (69), мы формально положили $\theta(\varphi,\psi) = \rho(\cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\psi)$ и выразив все фигурирующие в представлении (69) величины посредством частных производных от функции ρ, после громоздких преобразований, проведенных С.В.Тимченко, пришли к соотношению (2) при $n = 3$. Тот же прием привел к соотношению (2) при $n = 2$. Это позволило найти общий вид представления (2), что фактически свело задачу к исследованию поверхностей вида (2).

Все утверждения этой работы до теоремы 8 и теорема 10 получены авторами совместно, остальные А.А.Лигуном и С.В.Тимченко.

Список литературы

[1] *Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А.* Об одном представлении выпуклых поверхностей в n-мерных пространствах.- Доклады АН РАН, 2001, т. 377, N1, с.1-3.

[2] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* О геометрии выпуклых кривых.- Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Том 4, вып. 3, с. 88-92.

[3] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Описание выпуклых кривых.- Украинский матем. журнал, 2000, т.52, N7, с.908-922

[4] *Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А.* О геометрии выпуклых поверхностей.- Вістник Дніпропетровського університету, Математика,3, 1998, с.85-92.

[5] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. Киев, Изд. Института математики НАН Украины, 1997.

[6] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества.- М., Наука, 1985, 335 с.

[7] *Яглом И.М., Болтянский В.Г.* Выпуклые фигуры. М., Гостехиздат, 1951, 250 с.

[8] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.- М., Мир, 1974.

[9] *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М., Физматгиз, 1959, 1084 с.

[10] *Шварц Л.* Анализ.- М., Мир, 1972, 823 с.