

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В n -МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2001 г. А. А. Лигун, А. А. Шумейко, С. В. Тимченко

Представлено академиком С.М. Никольским 13.09.2000 г.

Поступило 27.09.2000 г.

Границу ∂T выпуклого компактного тела T будем называть выпуклой замкнутой двусторонней поверхностью.

В дальнейшем, говоря о поверхности $\Gamma = \partial T$, будем понимать строго выпуклую замкнутую двустороннюю поверхность, такую, что начало координат есть внутренняя точка тела T . Для $n = 1, 2, \dots$ будем считать $\Gamma = \Gamma(\mathbf{u}): \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{S}_n$ и

$$\mathbb{S}_n = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}_n: |\mathbf{u}| = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \right\} \quad (1)$$

есть сфера в $\mathbb{R}_n$.

Поверхность Γ будем называть гладкой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{S}_n: |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| < \delta \Rightarrow |\mathbf{n}(\Gamma, \mathbf{u}_1) - \mathbf{n}(\Gamma, \mathbf{u}_2)| < \varepsilon,$$

где $\mathbf{n}(\Gamma, \mathbf{u})$ – нормальный вектор поверхности Γ в точке $\Gamma(\mathbf{u})$.

Расстояние от начала координат до опорной плоскости к поверхности Γ в точке $\Gamma(\mathbf{u})$ называется опорной функцией к поверхности Γ ; обозначим ее через $\rho(\Gamma, \mathbf{u})$.

r -Слоем $\mathcal{H}_r(\Gamma)$ поверхности Γ называется объединение всех шаров радиуса r с центрами, лежащими на поверхности Γ .

Поверхность $\Gamma_r^+ = \partial(T \cup \mathcal{H}_r(\Gamma))$ называется внешней r -эквидастантой поверхности Γ , а $\Gamma_r^- = \partial(T \setminus \mathcal{H}_r(\Gamma))$ – внутренней r -эквидастантой поверхности Γ .

Каждой точке $\Gamma(\mathbf{u})$ поверхности Γ поставим в соответствие плотность численно равную гауссовой кривизне $K(\Gamma, \mathbf{u})$ поверхности Γ в этой точке. В этом случае центр тяжести поверхности называется точкой Штейнера.

Основной результат составляют следующие два утверждения.

Теорема 1. Пусть найдется $\varepsilon > 0$ такое, что функция $\rho(\mathbf{u}): \mathcal{H}_\varepsilon(\mathbb{S}_n) \rightarrow \mathbb{R}_1$ непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно на $\mathcal{H}_\varepsilon(\mathbb{S}_n)$ и поверхность $\Gamma(\mathbf{u}) = (x_1(\mathbf{u}), \dots, x_n(\mathbf{u})): \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ определена равенствами

$$x_i(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u})u_i + \frac{\partial \rho(\mathbf{u})}{\partial u_i} - u_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho(\mathbf{u})}{\partial u_j} u_j, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

и величина

$$K(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho(\mathbf{u})}{\partial u_j} u_j + \nabla \rho(\mathbf{u}) - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho(\mathbf{u})}{\partial u_j} u_j \right)^2 \rho(\mathbf{u}) \quad (3)$$

на сфере (1) почти всюду положительна.

Тогда:

1) поверхность, определенная равенствами (2), (3), есть выпуклая, замкнутая, двусторонняя поверхность;

2) опорная плоскость к поверхности Γ в точке $\Gamma(\mathbf{u})$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^n u_i x_i(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u});$$

3) если $\rho = \rho(\mathbf{u})$ неотрицательна на сфере (1), то $\rho(\mathbf{u})$ есть опорная функция поверхности Γ , а $K(\mathbf{u})$ – гауссова кривизна поверхности Γ в точке $\Gamma(\mathbf{u})$, т.е. $\rho(\Gamma, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u})$ и $K(\Gamma, \mathbf{u}) = K(\mathbf{u})$;

4) если

$$\rho_1(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n c_i u_i,$$

то $\Gamma(\rho_1) = \Gamma(\rho) + \mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$;

5) пусть поверхность $\Gamma(\mathbf{u}) = \Gamma(\rho, \mathbf{u})$ задана равенствами (2), тогда $\Gamma(\rho + r, \mathbf{u})$ есть внешняя r -эквидистанта $\Gamma(\rho, \mathbf{u})$. Если на сфере $\mathbb{S}_n$

$$\rho(\mathbf{u}) - r - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho(\mathbf{u})}{\partial u_j} u_j + \nabla \rho(\mathbf{u}) - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} u_j \right)^2 (\rho(\mathbf{u}) - r) > 0,$$

то $\Gamma(\rho - r, \mathbf{u})$ есть внутренняя r -эквидистанта поверхности $\Gamma(\rho, \mathbf{u})$;

6) точка $\text{grad}(\Gamma, \mathbf{u})|_{\mathbf{u}=0}$ есть точка Штейнера поверхности Γ вида (2).

Теорема 2. Для того чтобы поверхность $\Gamma(\mathbf{u})$ была гладкой выпуклой двусторонней, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2), где $\rho(\mathbf{u})$ – произвольная функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно на $\mathcal{H}_\varepsilon(\mathbb{S}_n)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и выполнялось условие $K(\mathbf{u}) > 0$ почти всюду на сфере (1).

Некоторые из свойств теоремы 1 были известны для выпуклых поверхностей (см., например, [1, 2] и библиографию к ним). Как следует из теоремы 2, это и есть свойства выпуклых поверхностей. Представление (2) вместе с теоремой 2 делает их доказательство простым и естественным.

Пусть

$$\mathfrak{H}(\Gamma, \gamma) = \inf\{\varepsilon < 0: \gamma \in \mathcal{H}_\varepsilon(\Gamma); \Gamma \in \mathcal{H}_\varepsilon(\gamma)\}.$$

Величину $\mathfrak{H}(\Gamma, \gamma)$ будем называть расстоянием типа Хаусдорфа между поверхностями Γ и γ (см., например, [3]).

Следствие 1. Для гладких выпуклых поверхностей Γ и γ с опорными функциями $\rho(\Gamma, \mathbf{u})$ и $\rho(\gamma, \mathbf{u})$ соответственно выполняется равенство

$$\mathfrak{H}(\Gamma, \gamma) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n} |\rho(\Gamma, \mathbf{u}) - \rho(\gamma, \mathbf{u})|. \quad (4)$$

В несколько ином виде равенство (4) содержится в [1].

Каждой ограниченной выпуклой замкнутой поверхности Γ и каждому направлению $\mathbf{u}$ соответствуют ровно две несовпадающие опорные к Γ плоскости, перпендикулярные этому направлению.

Если для каждого направления расстояние между этими плоскостями есть величина постоянная и равная d , то эта поверхность называется поверхностью равной ширины d .

Следствие 2. Для того чтобы выпуклая поверхность Γ с опорной функцией $\rho(\mathbf{u}) = \rho(\Gamma, \mathbf{u})$ была поверхностью равной ширины d , необходи-

мо и достаточно, чтобы на сфере $\mathbb{S}_n$ выполнялось условие

$$\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u}) = d. \quad (5)$$

Пусть

$$\rho_0 = C_0, \quad \rho_1 = \sum_{i=1}^n C_i u_i, \quad \rho_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{i,j} u_i u_j,$$

$$\rho_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{i,j,k} u_i u_j u_k, \dots$$

и ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} \rho_{2v+1}(\mathbf{u})$$

равномерно и абсолютно сходится на сфере $\mathbb{S}_n$, тогда если

$$\rho(\mathbf{u}) = \sum_{v=0}^{\infty} \rho_{2v+1}(\mathbf{u}),$$

то условие (5) выполняется.

Вначале теоремы 1, 2 были получены в работе [4] для случая описания плоских выпуклых кривых. При этом было получено более общее утверждение, дающее возможность описать не только гладкие кривые, но и кривые с углами и прямолинейными участками. Затем по аналогии с [4] в работе [5] было получено представление выпуклой поверхности в трехмерном пространстве в географических координатах. Этот результат является следствием теорем 1, 2. Приведем его формулировку.

Всюду далее $n = 3$. Полагая $(u_1, u_2, u_3) = (\cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \psi)$ в теоремах 1, 2 получаем

Следствие 3. Для того чтобы Γ была гладкой строго выпуклой замкнутой поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$\begin{aligned} x(\rho, \varphi, \psi) &= \rho(\varphi, \psi) \sin \psi \cos \varphi + \\ &+ \rho'_\psi(\varphi, \psi) \cos \psi \cos \varphi - \rho'_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \\ y(\rho, \varphi, \psi) &= \rho(\varphi, \psi) \sin \psi \sin \varphi + \\ &+ \rho'_\psi(\varphi, \psi) \cos \psi \sin \varphi - \rho'_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

$$z(\rho, \varphi, \psi) = \rho(\varphi, \psi) \cos \psi - \rho'_\psi(\varphi, \psi) \sin \psi,$$

где $\rho(\varphi, \psi)$ – произвольная функция, непрерывная вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно на прямо-

угольнике $(\varphi, \psi) \in D = [0, 2\pi] \times (0, \pi)$, такая, что величина

$$(\rho(\gamma, \psi) + \rho''_{\psi\psi}(\varphi, \psi))(\rho(\varphi, \psi) \sin^2 \psi + \rho'_\psi(\varphi, \psi) \times \\ \times \cos \psi \sin \psi + \rho''_{\varphi\varphi}(\varphi, \psi)) - (\rho'_\varphi(\varphi, \psi) - \rho''_{\varphi, \varphi}(\varphi, \psi))^2$$

не меняет знак на D и, кроме того, выполняется условие

$$\rho''_{\psi\psi}(\varphi, \psi)|_{\psi=+0} = \rho''_{\psi\psi}(\varphi, \psi)|_{\psi=\pi-0} = 0.$$

При этом φ, ψ суть эйлеровы углы опорной плоскости, а $\rho(\varphi, \psi)$ есть опорная функция поверхности Γ .

Приведем несколько результатов, которые следуют из теорем 1, 2.

Для произвольной пары ортогональных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ и выпуклой поверхности Γ существует единственный прямой параллелепипед, описанный вокруг Γ с ребрами параллельными векторам $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ и $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ – векторное произведение векторов). Если для любых ортогональных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ сумма всех ребер этого параллелепипеда равна P , то такая поверхность называется P -поверхностью, если полная поверхность параллелепипеда называется P -поверхностью, если полная поверхность параллелепипеда равна фиксированному числу S , то поверхность называется S -поверхностью, а если объем описанного параллелепипеда равен фиксированному числу V , то такая поверхность называется V -поверхностью.

Следствие 4. Для того чтобы поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы 2,

была P -поверхностью, S -поверхностью или V -поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы функция $\rho(\mathbf{u})$ удовлетворяла условиям

$$\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{v}) + \\ + \rho(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{P}{4},$$

$$(\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u}))(\rho(\mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{v})) + \\ + (\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u}))(\rho(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{u} \times \mathbf{v})) + \\ + (\rho(\mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{v}))(\rho(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{u} \times \mathbf{v})) = 2S$$

или

$$(\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u}))(\rho(\mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{v})) + \\ + (\rho(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \rho(-\mathbf{u} \times \mathbf{v})) = V$$

соответственно, где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – любые ортогональные векторы из S_3 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
2. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. М.: Гостехиздат, 1951. 250 с.
3. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых Киев, 1997.
4. Лигун А.А., Шумейко А.А. // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 1998. Т. 4. В. 3. С. 88–92.
5. Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А. // Вісн. Дніпропетров. ун-ту. Математика. 1998. Т. 3. С. 85–92.