УДК 517.5-514.17

Характеристики выпуклых кривых

А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.В.Тимченко

Одной из основных задач прикладной механики, основы которой были заложены П.Л.Чебышевым, является построение механизмов которые обладают возможностью воспроизведения весьма сложных кривых как траекторий отдельных точек звеньев. Это могут быть как алгебраические так и трансцендентные кривые. Порядок и вид этих кривых, вообще говоря, могут быть любыми.

В работе дается общий вид некоторых характеристических кривых, порожденных данной кривой. В частности, для произвольной выпуклой кривой приводится общий вид тангенциальной кривой и обобщенной циклоиды.

Предварительные результаты. Все построения данной работы базируются на одном представлении выпуклых кривых, приведенном в работе [1]. Для удобств ссылок приведем основной результат этой работы.

Пусть Θ_n есть множество промежутков $[\alpha_k, \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ из $[0, 2\pi]$ таких, что $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_n$.

Через Ψ_m обозначим m-мерный вектор $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ такой, что

$$\varphi_k \in (\beta_1, \beta_1 + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i) \ \ (k = 1, 2, \ldots, m)$$

и $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_m$. Обозначим через $L_m = \{\ell_k\}_{k=1}^m$ m-мерный вектор с положительными координатами.

Кроме того, пусть $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, L_m)$ класс замкнутых выпуклых жордановых кривых $\Gamma(t)$ обладающих следующими свойствами:

если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом α_i, то при переходе через эту точку угол наклона принимает значение β_i;

если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси OX под углом φ_k, то касательная будет совпадать с участком кривой длины l_k.

Здесь мы считаем, что касательная в точке $(x(t), y(t))$ направлена в направлении вектора $(x'(t), y'(t))$.

Для функции $f(t)$, ν–я производная которой в каждой точке $t \in (a, b)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$, положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2}(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0)).$$

Каждому набору (Θ_n, Ψ_m, L_m) поставим в соответствие класс $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, L_m)$ 2π-периодических кусочно-дифференцируемых функций определенный следующим образом:

производная $\theta'(\varphi)$ непрерывна во всех точках промежутка $[0, 2\pi]$, кроме точек φ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, в которых имеет место соотношение

$$\theta'(\varphi_k + 0) - \theta'(\varphi_k - 0) = l_k,$$

производная $\theta^{((2))}(\varphi)$ почти всюду существует, функция $\theta(\varphi)+\theta^{((2))}(\varphi)$ не меняет знак на периоде, обращается в ноль для $\varphi\in[\alpha_k,\beta_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и на множестве $(\beta_1,\beta_1+2\pi)\setminus\bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_1)$ почти всюду отлична от нуля.
Теорема А. *Кривая $\Gamma(\theta)$ лежит в классе $\mathfrak{M}(\Theta_n,\Psi_m,L_m)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$\Gamma(\theta,\varphi)=\begin{cases}x(\theta,\varphi)\\ y(\theta,\varphi)\end{cases}=\begin{cases}-\theta(\varphi)\sin\varphi-\theta'(\varphi)\cos\varphi;\\ \theta(\varphi)\cos\varphi-\theta'(\varphi)\sin\varphi,\end{cases}\tag{1}$$

где функция $\theta(\varphi)$ лежит в классе $\mathfrak{T}(\Theta_n,\Psi_m,L_m)$.

Функция $\theta(\varphi)$ есть опорная функция кривой $\Gamma(\theta)$ в точке $\Gamma(\varphi)$, то есть при кажом значении $\varphi\in[0,2\pi]$ величина $\theta(\varphi)$ совпадает с расстоянием от начала координат до касательной к кривой $\Gamma(\theta)$ в точке $\Gamma(\varphi)$.

Тангенциальная кривая. Если кривая $\Gamma(\varphi)$ в каждой точке имеет касательную $\Gamma'(\varphi)=(x'(\varphi),\ y'(\varphi))$, то для заданного ε геометрическое место точек концов векторов длины ε с направлением $\Gamma'(\varphi)$ и началом в точке $\Gamma(\varphi)$ называется ε -тангенциальной кривой или просто тангенциальной кривой. $\varepsilon-$ тангенциальную кривую для кривой $\Gamma(\varphi)$ будем обозначать $T_\varepsilon\Gamma(\varphi)$.

Сама кривая $\Gamma(\varphi)$ по отношению к тангенциальной кривой называется трактрисой.

Если кривая $\Gamma(\varphi)$ имеет угловую точку φ_0 с касательными векторами $\Gamma'(\varphi_0+0)$ и $\Gamma'(\varphi_0-0)$, то участком тангенциальной кривой будем считать дугу окружности с центром в данной точке φ_0 и радиусом ε.

Теорема 1. *Пусть кривая $\Gamma(\theta)$ лежит в классе $\mathfrak{M}(\Theta_n,\Psi_m,L_m)$. Тогда ее тангенциальная кривая $T_\varepsilon\Gamma(\varphi)$ для всех точек $\Gamma(\theta,\varphi)$, не являющихся угловыми, имеет вид*

$$T_\varepsilon\Gamma(\theta,\varphi)=\begin{cases}x_\varepsilon(\theta,\varphi)\\ y_\varepsilon(\theta,\varphi)\end{cases}=\begin{cases}-\theta(\varphi)\sin\varphi-(\theta'(\varphi)-\varepsilon)\cos\varphi;\\ \theta(\varphi)\cos\varphi-(\theta'(\varphi)-\varepsilon)\sin\varphi,\end{cases}\tag{2}$$

где функция $\theta(\varphi)$ лежит в классе $\mathfrak{T}(\Theta_n,\Psi_m,L_m)$, а для угловых точек –это части окружности радиуса ε.

Действительно, пусть кривая $\Gamma(\theta)$ определяется равенствами (1). Тогда направляющий вектор касательной к кривой $\Gamma(\theta)$ в точке $\Gamma(\theta,\varphi)$ есть

$$\Gamma'(\theta,\varphi)=-(\theta(\varphi)+\theta^{((2))}(\varphi))(\cos\varphi,\sin\varphi).$$

Так как кривая $\Gamma(\theta)$ выпуклая и величина $\theta(\varphi)+\theta^{((2))}(\varphi)$ больше нуля, то вектор $a(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ есть нормализованный вектор кривой. Таким образом, для тех точек кривой $\Gamma(\theta)$ где существует производная $\Gamma'(\theta)$ уравнение тангенциальной кривой будет иметь вид

$$\Gamma(\theta,\varphi)+\varepsilon\ a(\varphi)=(x(\theta,\varphi)+\varepsilon\ \cos\varphi,\ y(\theta,\varphi)+\varepsilon\ \sin\varphi),$$

что вместе равенствами (1) и завершает доказательство теоремы для точек, не являющихся угловыми.

Для угловых точек утверждение очевидно.

Отметим одно простое утверждение. Если

$$\theta(\varphi)=\theta_1(\varphi)+x_0\ \sin\varphi-y_0\ \cos\varphi,\tag{3}$$

то

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \end{cases} = \begin{cases} x(\theta_1,\varphi) - x_0, \\ y(\theta_1,\varphi) - y_0. \end{cases}$$

Используя в (2) вместо функции $\theta(\varphi)$ правую часть равенства (3) и учитывая, что $\theta'(\varphi) = \theta_1'(\varphi) + x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi$, после очевидных преобразований, получаем требуемое соотношение.

Выясним условия при которых тангенциальная кривая будет выпуклой. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma(\theta,\varphi) = \Gamma(\varphi)$ выпуклая, замкнутая кривая и $\theta(\varphi)$ ее опорная функция. Для того чтобы тангенциальная кривая $T_\varepsilon\Gamma(\varphi)$ была выпуклой, необходимо и достаточно чтобы выполнялось одно из неравенств:*

$$\varepsilon > \max_\varphi \left(-\frac{\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi))^2 - 4(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))^2} \right) \tag{4}$$

или

$$\varepsilon < \min_\varphi \left(-\frac{\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi))^2 - 4(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))^2} \right). \tag{5}$$

Действительно, условие выпуклости эквивалентно тому, что кривизна кривой положительна, то есть

$$K_\varepsilon(\varphi) = \frac{x_\varepsilon' y_\varepsilon'' - y_\varepsilon' x_\varepsilon''}{((x_\varepsilon')^2 + (y_\varepsilon')^2)^{3/2}} > 0 \tag{6}$$

при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Подставляя значения производных

$$x_\varepsilon' = -(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))\cos\varphi - \varepsilon\sin\varphi,$$
$$y_\varepsilon' = -(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))\sin\varphi + \varepsilon\cos\varphi,$$
$$x_\varepsilon'' = (\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))\sin\varphi - (\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi))\cos\varphi - \varepsilon\cos\varphi,$$
$$y_\varepsilon'' = -(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))\cos\varphi - (\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi))\sin\varphi - \varepsilon\sin\varphi,$$

в формулу для вычисления кривизны кривой, получим, что кривизна тангенциальной кривой $T_\varepsilon\Gamma(\theta)$ в точке φ будет определяться равенством

$$K_\varepsilon(\varphi) = \frac{(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))^2 + \varepsilon(\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi)) + \varepsilon^2}{((\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, условие (6) эквивалентно условию

$$(\theta(\varphi)+\theta''(\varphi))^2 + \varepsilon(\theta'(\varphi)+\theta'''(\varphi)) + \varepsilon^2 > 0 \quad (\varphi \in [0,2\pi]),$$

что и доказывает неравенства (4)-(5).

Отметим, что площадь $S(\Gamma_\varepsilon)$ фигуры, ограниченной тангенциальной кривой $T_\varepsilon\Gamma(\varphi)$, порожденной выпуклой кривой Γ, не зависит от вида кривой, то есть

$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \pi\varepsilon^2,$$

где $S(\Gamma)$– площадь фигуры, ограниченной кривой Γ.

Действительно, пусть Γ–любая выпуклая кривая, тогда она представима в виде (1), следовательно ее тангенциальная кривая $T_\varepsilon\Gamma$, по предложению 1, будет представима в виде (2).

Так как площадь фигуры S, ограниченной кривой Γ определяется равенством
$$S = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} xdy - ydx,$$
то
$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\varepsilon} x_\varepsilon dy_\varepsilon - y_\varepsilon dx_\varepsilon - \frac{1}{2}\int_{\Gamma} xdy - ydx.$$
Используя значения функций $x(\varphi)$,$y(\varphi)$,$x_\varepsilon(\varphi)$, $y_\varepsilon(\varphi)$ и их дифференциалов
$$dx = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dx_\varepsilon = (-(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\cos\varphi - \varepsilon\sin\varphi)d\varphi,$$
$$dy_\varepsilon = (-(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\sin\varphi + \varepsilon\cos\varphi)d\varphi,$$
получаем
$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\theta(\varphi)\cdot(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) + \varepsilon^2 - \varepsilon\theta'(\varphi) - (\theta(\varphi)^2 + (\theta'(\varphi))^2)\right] d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\theta(\varphi)\cdot\theta''(\varphi) + (\theta'(\varphi))^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon\theta'(\varphi)\right] d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d(\theta(\varphi)\cdot\theta'(\varphi)) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\varepsilon^2 - \varepsilon\theta'(\varphi))d\varphi.$$
Учитывая, что для 2π-периодической функции с интегрируемой производной имеет место равенство
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d(\theta'(\varphi)) = 0,$$
получаем
$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = \pi\cdot\varepsilon^2,$$
что и требовалось доказать.

Выразим опорную функцию $\theta(\psi)$ тангенциальной кривой $T_\varepsilon\Gamma$ через опорную функцию $\theta(\varphi)$ кривой Γ.

Пусть ψ–угол наклона касательной тангенциальной кривой к положительному направлению оси OX. Тогда
$$tg\psi = \frac{\sin\varphi - \sigma\cos\varphi}{\cos\varphi + \sigma\sin\varphi},$$
где
$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)}.$$
Касательная к тангенциальной кривой описывается уравнением
$$(x + \theta(\varphi)\sin\varphi + (\theta'(\varphi) - \varepsilon)\cos\varphi)(\sin\varphi - \sigma\cos\varphi) =$$
$$= (y - \theta(\varphi)\cos\varphi + (\theta'(\varphi) - \varepsilon)\sin\varphi)(\cos\varphi + \sigma\sin\varphi)$$
Таким образом, расстояние от начала координат $(0,0)$ до касательной тангенциальной кривой
$$r(\varphi) = \frac{\theta(\varphi) - \sigma(\theta'(\varphi) + \varepsilon)}{\sqrt{1+\sigma^2}},$$

то есть $\theta(\psi) = r(\varphi)$, где

$$\psi = arctg\left(\frac{\sin\varphi - \sigma\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi + \sigma\cdot\sin\varphi}\right).$$

Обобщенная циклоида. В теории машиностроения используются механизмы для черчения циклических кривых, образованных качением окружности по прямой или по окружности. В общем виде циклические кривые можно всегда представить как рулетты, то есть кривые которые описывает на неподвижной плоскости точка жестко связанная с одной из двух каких-либо линий, когда одна без скольжения катится по другой. Циклоида является одной из простейших рулетт.

Другими примерами рулетт являются укороченная и удлиненная циклоиды, описываемые точкой, находящейся соответственно внутри или вне кривой, катящейся по прямой линии (см.[2],[3]).

Пусть выпуклая фигура D ограниченная кривой $\Gamma(\theta)$. Траекторию движения точки кривой Γ,катящейся без скольжения по прямой линии будем называть обобщенной циклоидой.

Обозначим обобщенную циклоиду через $C\Gamma(\theta)$.

Теорема 3. *Пусть кривая $\Gamma(\theta)$ лежит в классе $\mathfrak{M}(\Theta_n, \Psi_m, L_m)$. Тогда ее обобщенная циклоида $\Gamma(\varphi)$ для всех точек $\Gamma(\theta,\varphi)$ имеет вид*

$$\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{cases} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \end{cases} = \begin{cases} \int_0^{\varphi}\theta(u)du + \theta'(\varphi) - \theta(\varphi)\sin\varphi - \theta'(\varphi)\cos\varphi; \\ \theta(\varphi) - \theta(0)\cos\varphi - \theta'(0)\sin\varphi, \end{cases} \tag{7}$$

где функция $\theta(\varphi)$ лежит в классе $\mathfrak{T}(\Theta_n, \Psi_m, L_m)$.

Действительно, если

$$\Gamma(\varphi) = \begin{cases} -\theta(\varphi)\sin\varphi - \theta'(\varphi)\cos\varphi, \\ \theta(\varphi)\cos\varphi - \theta'(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

то после поворота этой кривой на угол ψ вокруг точки Штейнера, получим

$$\Gamma_\psi(\varphi) = \begin{cases} -\theta(\varphi-\psi)\sin\varphi - \theta'(\varphi-\psi)\cos\varphi, \\ \theta(\varphi-\psi)\cos\varphi - \theta'(\varphi-\psi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Как следует из [1], при $\varphi = 0$ касательная к кривой будет горизонтальной и соответствующая точка $(\theta'(0-\psi), -\theta(0-\psi))$ будет минимальной, и, следовательно,

$$\Gamma_\psi(\varphi) = \begin{cases} -\theta(\varphi-\psi)\sin\varphi - \theta'(\varphi-\psi)\cos\varphi, \\ \theta(\varphi-\psi)\cos\varphi - \theta'(\varphi-\psi)\sin\varphi + \theta(-\psi) \end{cases}$$

есть кривая, лежащая по оси OX.

Если кривая Γ катится без скольжения по оси OX, то при повороте на угол ψ точка касания будет отстоять от начала координат на расстояние равное длине $\ell(\psi)$ дуги кривой Γ. Из [1] имеем

$$\ell(\psi) = \int_0^{\psi}(\theta(-\varphi) + \theta''(-\varphi))d\varphi = \int_0^{\psi}\theta(-\varphi)d\varphi - \theta'(-\psi) + \theta'(0).$$

Таким образом, если при качении по оси OX кривая Γ повернется на угол ψ, то ее уравнение примет вид

$$\begin{cases} -\theta(\varphi-\psi)\sin\varphi-\theta'(\varphi-\psi)\cos\varphi-\theta'(\pi-\psi)+\ell(\psi), \\ \theta(\varphi-\psi)\cos\varphi-\theta'(\varphi-\psi)\sin\varphi+\theta(\pi-\psi). \end{cases}$$

Таким образом уравнение циклоиды примет вид

$$\Gamma_\psi(0)=\begin{cases} -\theta(0)\sin\psi-\theta'(0)\cos\psi+\theta'(-\psi)+\ell(\psi), \\ -\theta(0)\cos\psi+\theta'(0)\sin\psi+\theta(-\psi). \end{cases}$$

При качении кривой ее точка Штейнера описывает траекторию

$$\widetilde{\Gamma}_\psi=\begin{cases} -\theta'(-\psi)+\ell(\psi), \\ \theta(-\psi). \end{cases}$$

Таким образом уравнение трохоиды (расширенной или укороченной циклоиды) кривой будет иметь вид

$$\widetilde{\Gamma}_\psi(\lambda,\varphi_0)=\lambda\Gamma_\psi(0)+(1+\lambda)\widetilde{\Gamma}_\psi=$$

$$(8)\qquad =\begin{cases} \lambda\left(-\theta(\varphi_0)\sin(\varphi_0+\psi)-\theta'(\varphi_0)\cos(\varphi_0+\psi)\right)-\theta'(-\psi)+\ell(\psi), \\ \lambda\left(\theta(\varphi_0)\cos(\varphi_0+\psi)-\theta'(\varphi_0)\sin(\varphi_0+\psi)\right)+\theta(-\psi), \end{cases}$$

где λ – любое действительное число. При $0<\lambda<1$ (8) есть уравнение укороченной обобщенной циклоиды, при $\lambda>1$ –удлиненной циклоиды.

Обобщенная гипоциклоида.

Пусть даны замкнутые строго выпуклые кривые

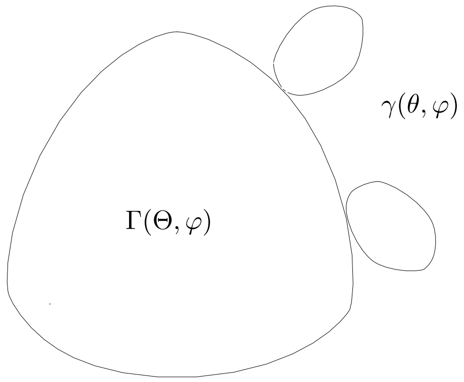
$$\Gamma(\Theta,\varphi)=\begin{cases} -\Theta(\varphi)\sin\varphi-\Theta'(\varphi)\cos\varphi, \\ \Theta(\varphi)\cos\varphi-\Theta'(\varphi)\sin\varphi, \end{cases}$$

и

$$\gamma(\theta,\varphi)=\begin{cases} -\theta(\varphi)\sin\varphi-\theta'(\varphi)\cos\varphi, \\ \theta(\varphi)\cos\varphi-\theta'(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Пусть кривая γ катится без скольжения по внешней стороне кривой Γ. Ясно, что длины соприкасаемых дуг кривых будут совпадать:

$$\int_0^\varphi\left(\Theta(t)+\Theta''(t)\right)dt=\int_\pi^{\pi+\psi}\left(\theta(-t)+\theta''(-t)\right)dt.$$



Понятно, что катящаяся кривая при этом проворачивается на угол ψ. Уравнение этой кривой при каждом фиксированном ψ будет иметь вид

$$\gamma_\psi(\theta,\phi)=\begin{cases}-\theta(\phi-\psi)\sin\phi-\theta'(\phi-\psi)\cos\phi,\\ \theta(\phi-\psi)\cos\phi-\theta'(\phi-\psi)\sin\phi.\end{cases}$$

Сдвинем эту кривую так, чтобы ее максимум совпадал с началом координат

$$\gamma^0_\psi(\theta,\phi)=\begin{cases}-\theta'(\pi-\psi)-\theta(\phi-\psi)\sin\phi-\theta'(\phi-\psi)\cos\phi,\\ \theta(\pi-\psi)+\theta(\phi-\psi)\cos\phi-\theta'(\phi-\psi)\sin\phi.\end{cases}$$

Так как для кривой $\Gamma(\Theta,\varphi)$ угол φ соответствует углу наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, то для определения уравнения катящейся кривой следует плоскость кривой $\gamma^0_\psi(\theta,\phi)$ повернуть на угол φ и совместить начало координат этой плоскости с точкой $\Gamma(\Theta,\varphi)$ так, чтобы касательная к Γ в этой точке совпала с осью абсцисс повернутой плоскости.

Тогда уравнение $\gamma^0_\psi(\theta,\phi)$ в плоскости кривой Γ будет иметь вид

$$\gamma_\psi(\theta,\phi)=(x(\phi,\psi),y(\phi,\psi)),$$

где

$$\begin{gathered}x(\phi,\psi)=-\Theta(\varphi)\sin\varphi-\Theta'(\varphi)\cos\varphi+(-\theta'(\pi-\psi)-\theta(\phi-\psi)\sin\phi-\\ -\theta'(\phi-\psi)\cos\phi)\cos\varphi+(\theta(\pi-\psi)+\theta(\phi-\psi)\cos\phi-\theta'(\phi-\psi)\sin\phi)\sin\varphi=\\ =-\Theta(\varphi)\sin\varphi-\Theta'(\varphi)\cos\varphi-\theta'(\pi-\psi)\cos\varphi+\theta(\pi-\psi)\sin\varphi+\\ +\theta(\phi-\psi)\sin(\varphi-\phi)-\theta'(\phi-\psi)\cos(\varphi-\phi)\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}y(\phi,\psi)=\Theta(\varphi)\cos\varphi-\Theta'(\varphi)\sin\varphi-(-\theta'(\pi-\psi)-\theta(\phi-\psi)\sin\phi-\\ -\theta'(\phi-\psi)\cos\phi)\sin\varphi+(\theta(\pi-\psi)+\theta(\phi-\psi)\cos\phi-\theta'(\phi-\psi)\sin\phi)\cos\varphi=\\ =\Theta(\varphi)\cos\varphi-\Theta'(\varphi)\sin\varphi+\theta'(\pi-\psi)\sin\varphi+\theta(\pi-\psi)\cos\varphi+\\ +\theta(\phi-\psi)\cos(\varphi-\phi)-\theta'(\phi-\psi)\sin(\varphi-\phi).\end{gathered}$$

Таким образом уравнение гипоциклоиды имеет вид

$$\gamma_\psi(\theta,\pi)=(x(\psi),y(\psi)),$$

где

$$x(\psi)=-\Theta(\varphi)\sin\varphi-\Theta'(\varphi)\cos\varphi-\theta'(\pi-\psi)\cos\varphi+\theta(\pi-\psi)\sin\varphi+$$

$$-\theta(\pi)\sin(\psi)-\theta'(\pi)\cos(\psi)$$

и

$$y(\psi)=\Theta(\varphi)\cos\varphi-\Theta'(\varphi)\sin\varphi+\theta'(\pi-\psi)\sin\varphi+\theta(\pi-\psi)\cos\varphi+$$
$$+\theta(\pi)\cos(\psi)+\theta'(\pi)\sin(\psi),$$

при этом

$$\int_0^{\varphi}(\Theta(t)+\Theta''(t))\,dt=\int_{\pi}^{\pi+\psi}(\theta(-t)+\theta''(-t))\,dt.$$

Тангенциальная кривая и обобщенная циклоида дуговых сплайнов. Жордановую кривую $\Gamma(\theta)$ будем называть кусочно–гладкой, если в каждой точке касательная изменяется непрерывно.

Жордановую кривую $\gamma_n(\varphi)$ будем называть дуговым сплайном, если она кусочно-гладкая и состоит из n дуг окружностей с центрами $(X_{i+1/2},\, Y_{i+1/2})$ и радиусами $R_{i+1/2}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$.

Пусть $\Delta_n=0=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=2\pi$ произвольное разбиение периода. Тригонометрическим сплайном по разбиению Δ_n будем называть непрерывную вместе со своей производной 2π-периодическую функцию, которая на каждом из помежутков $[\varphi_i,\,\varphi_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ имеет вид

$$s(\varphi)=A_{i+1/2}+B_{i+1/2}\sin\varphi+C_{i+1/2}\cos\varphi,$$

где $A_{i+1/2},B_{i+1/2},C_{i+1/2}$ некоторые константы.

Множество таких сплайнов обозначим через $ST_1(\Delta_n)$.

Теорема В.. ([1]) *Любой дуговой сплайн* $\gamma(\Delta_n,\varphi)$ *с центрами* $(X_{i+1/2},\, Y_{i+1/2})$ *и радиусами* $R_{i+1/2}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ *представим в виде*

$$\gamma(\Delta_n,\varphi)=\begin{cases}x(\Delta_n,\varphi)\\ y(\Delta_n,\varphi)\end{cases}=\begin{cases}-\theta(\Delta_n,\varphi)\sin\varphi-\theta'(\Delta_n,\varphi)\cos\varphi;\\ \theta(\Delta_n,\varphi)\cos\varphi-\theta'(\Delta_n,\varphi)\sin\varphi,\end{cases}\tag{9}$$

где тригонометрический сплайн $\theta(\Delta_n)\in ST_1(\Delta_n)$ *такой, что* $A_{i+1/2}>0$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ *и наоборот, каждый тригонометрический сплайн* $\theta(\Delta_n)\in ST_1(\Delta_n)$ *такой, что* $A_{i+1/2}>0$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ *порождает дуговой сплайн (9).*

Для $\varphi\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ *параметры дугового и тригонометрического сплайнов однозначно определяются равенствами*

$$X_{i+1/2}=-B_{i+1/2},Y_{i+1/2}=C_{i+1/2},R_{i+1/2}=A_{i+1/2}.$$

Для различных тригонометрических (и соответственно, дуговых) сплайнов приложения этой теоремы были получены в работах [4] и [5].

Пусть $\theta(\Delta_n,\varphi)$–тригонометрический сплайн. Из определения тригонометрического сплайна следует, что для всех φ тангенциальная кривая будет непрерывной, замкнутой и для $\varphi\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$ будет задаваться равенствами

$$\gamma_\varepsilon(\Delta_n,\varphi)=\begin{cases}x_\varepsilon(\Delta_n,\varphi)\\ y_\varepsilon(\Delta_n,\varphi)\end{cases}=\begin{cases}-A_{i+1/2}\sin\varphi+\varepsilon\cos\varphi-B_{i+1/2};\\ A_{i+1/2}\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi+C_{i+1/2}\end{cases}.\tag{10}$$

Следовательно, для $\varphi\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$ функции $\theta(\Delta_n,\varphi)$ будет соответствовать дуга окружности радиуса $\sqrt{A^2_{i+1/2}+\varepsilon^2}$ с центром в точке $(-B_{i+1/2},\, C_{i+1/2})$.

Тангенциальная кривая $\gamma_\varepsilon(\Delta_n,\varphi)$ не является гладкой и, если α_i угол между левым и правым касательными векторами в точке стыковки окружностей, то

$$\sin^2\alpha_i = \frac{\varepsilon^2\cdot(A_{i+1/2}-A_{i-1/2})^2}{A^2_{i+1/2}\cdot A^2_{i-1/2}+\varepsilon^2(A^2_{i+1/2}+A^2_{i-1/2})+\varepsilon^4}.$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$A_{i+1/2} = A_i + A_i' h_{i+1/2} + 0.5A_i'' h^2_{i+1/2} + O(h^3_{i+1/2}),$$

$$A_{i-1/2} = A_i + A_i' h_{i-1/2} + 0.5A_i'' h^2_{i-1/2} + O(h^3_{i-1/2}),$$

где $h_{i+1/2} = \varphi_{i+1}-\varphi_i$, $h_{i-1/2} = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.

Тогда

$$\sin^2\alpha_i = \frac{\varepsilon^2\cdot(h_{i+1/2}-h_{i-1/2})^2\cdot[A_i' + 0.5A_i''(h_{i+1/2}+h_{i-1/2})]^2}{[\varepsilon^2 + A_i^2 + A_i\cdot A_i'\cdot(h_{i+1/2}+h_{i-1/2})]^2}$$

или

$$\sin\alpha_i = \frac{\varepsilon\cdot\Delta h_i\cdot[A_i' + A_i''\cdot h_i^*]}{\varepsilon^2 + A_i^2 + 2A_i\cdot A_i'\cdot h_i^*} + O((h_i^*)^3),$$

где $\Delta h_i = h_{i+1/2} - h_{i-1/2}$, $h_i^* = 0.5(h_{i+1/2}+h_{i-1/2})$.

Следовательно имеет место асимптотическое равенство

$$\sin\alpha_i = \varepsilon\cdot\Delta h_i\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon^2+A_i^2}\cdot\frac{A_i' + A_i''\cdot h_i^*}{1+\frac{2A_i\cdot A_i'}{\varepsilon^2+A_i^2}\cdot h_i^*}\right] + O((h_i^*)^3),$$

$$\sin\alpha_i = \varepsilon\cdot\Delta h_i\cdot\left[\frac{A_i}{\varepsilon^2+A_i^2} + \frac{A_i^2\cdot(A_i''-2A_i')+\varepsilon^2\cdot A_i''}{\varepsilon^2+A_i^2}\cdot h_i^*\right] + O(\max(h_i^*)^3,\varepsilon^4,\varepsilon h_i^2).$$

Таким образом при $h_i = \max h_{i+1/2}\to 0$ угол $\alpha_i\to 0$.

То есть, если $\Gamma(\theta)$ гладкая, кусочно–окружностная кривая, то тангенциальная кривая $T_\varepsilon\Gamma(\theta)$ кривой $\Gamma(\theta)$ есть кусочно–окружностная, но не гладкая кривая с теми же центрами и радиусами $R_\varepsilon = \sqrt{A^2_{i+1/2}+\varepsilon^2}$.

Из определения тригонометрического сплайна следует что для всех $\varphi\in[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$ обобщенная циклоида будет иметь следующее параметрическое задание

$$\gamma_c(\Delta_n,\varphi) = \begin{cases} x_c(\Delta_n,\varphi) \\ y_c(\Delta_n,\varphi)\end{cases} = \begin{cases} A_{i+1/2}(\varphi-\sin\varphi) - B_{i+1/2}; \\ A_{i+1/2}(1-\cos\varphi),\end{cases} \tag{11}$$

то есть функции будет соответствовать дуга циклоиды с началом в точке $(-B_{i+1/2},0)$.

Покажем, что кривая $\gamma_c(\Delta_n,\varphi)$ кусочно–гладкая. Для этого достаточно показать, что выполняется условие

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}y_{i+1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi}x_{i+1/2}(\varphi_i)} = \frac{\frac{d}{d\varphi}y_{i-1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi}x_{i-1/2}(\varphi_i)}, \tag{12}$$

то есть касательные справа и слева в точке φ_i совпадают.

Для этого заметим, что

$$\frac{d}{d\varphi}y_{i+1/2}(\varphi_i) = A_{i+1/2}\sin\varphi_i,$$

$$\frac{d}{d\varphi}\,x_{i+1/2}(\varphi_i) = A_{i+1/2}(1-\cos\varphi_i)$$

и, следовательно,

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}\,y_{i+1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi}\,x_{i+1/2}(\varphi_i)} = \frac{A_{i+1/2}\sin\varphi_i}{A_{i+1/2}(1-\cos\varphi_i)} = \frac{\sin\varphi_i}{(1-\cos\varphi_i)}.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}\,y_{i-1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi}\,x_{i-1/2}(\varphi_i)} = \frac{A_{i-1/2}\sin\varphi_i}{A_{i-1/2}(1-\cos\varphi_i)} = \frac{\sin\varphi_i}{(1-\cos\varphi_i)},$$

что и доказывает (), а с ним и гладкость кривой $\gamma_c(\Delta_n,\varphi)$.

Если кривая $\Gamma(\theta)$ кусочно–гладкая и $\theta(\varphi)$ есть тригонометрический сплайн, то многие характеристики кривой вычисляются относительно легко через коэффициенты этого сплайна.

Предложение 1. Если $\theta(\varphi)$–есть тригонометрический сплайн, то длина любого дугового сплайна $\gamma_c(\Delta_n,\varphi)$ определяется равенством

$$L(\Gamma_c) = 4\sum_{i=1}^{n} A_{i+1/2}\,\sin\frac{\delta_{i+1/2}}{2}\sin\frac{\varphi_{i+1/2}}{2},$$

а площадь фигуры ограниченной выпуклым дуговым сплайном $\gamma_c(\Delta_n,\varphi)$ равна

$$S(\Gamma_c) = \sum_{i=1}^{n} A^2_{i+1/2}\left(\frac{3}{2}\delta_{i+1/2} - 4\sin\frac{\delta_{i+1/2}}{2}\,\cos\frac{\varphi_{i+1/2}}{2} + \frac{1}{2}\sin\delta_{i+1/2}\,\cos\varphi_{i+1/2}\right),$$

где $\delta_{i+1/2} = \varphi_{i+1}-\varphi_i$, $\varphi_{i+1/2} = \varphi_{i+1}+\varphi_i$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$.

Действительно, так площадь обобщенной циклоиды в общем виде выражается равенством

$$S(\Gamma_c) = \int_0^{2\pi}(\theta-\theta(0)\cos\varphi-\theta'(0)\sin\varphi)(\theta+\theta'')(1-\cos\varphi)d\varphi.$$

Тогда, если

$$\theta(\varphi) = A_{i+1/2} + B_{i+1/2}\sin(\varphi) + C_{i+1/2}(\varphi)$$

то

$$S(\Gamma_c) = \sum_{i=1}^{n} A^2_{i+1/2}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A^2_{i+1/2}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}(\frac{3}{2} - 2\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\cos 2\varphi)d\varphi.$$

Вычисляя данный интеграл, получаем требуемое равенство.

В общем виде длина дуги обобщенной циклоиды вычисляется следующим образом

$$L(\Gamma_c) = \int_0^{2\pi}\sqrt{(\theta+\theta'')^2(1-\cos\varphi)^2 + (\theta'+\theta(0)\sin\varphi-\theta'(0)\cos\varphi)^2}d\varphi.$$

Если $\theta(\varphi)$–тригонометрический сплайн, то

$$L(\Gamma_c) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}\sqrt{A^2_{i+1/2}(1-\cos\varphi)^2 + A^2_{i+1/2}\sin\varphi^2}d\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2} A_{i+1/2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sqrt{1 - \cos\varphi}\, d\varphi.$$

Вычисляя данный интеграл, получаем требуемое равенство для длины контура дугового сплайна.

В заключение заметим, что результаты статьи, предоставляют аналитическое описание характеристических линий не только любых выпуклых кривых, но и их технологических аналогов на основе гладких кусочно-окружностных линий. Это позволяет, вместе с описанием кривых равной ширины и $\Delta-$ кривых, полученных в работе [6], проектировать механизмы с заранее заданными свойствами.

Список литературы

[1] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Об описании выпуклых кривых.- Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1998. Том 4, вып. 3, с. 88-92.

[2] *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М., Физматгиз, 1959, 1084 с.

[3] *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. М., Наука, 1988, 640 с.

[4] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Проектирование кулачковых механизмов как гладких кусочно-окружностных кривых.- Управляющие системы и машины, информационные технологии. N 5, 1999, с.43-53.

[5] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Метод проектирования кулачковых механизмов с помощью кусочно-окружностных кривых.- Кибернетика и системный анализ, 6, 1999, с.1-8.

[6] *Лигун А.А., Шумейко А.А.*Описание выпуклых кривых.-Украинский матем. журнал, 2000, т.52, N7, с.908-922