Приклади розв'язування рівнянь, що містять невідому під знаком модуля

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x+1|+|x+2|+|x+3|=2{,}5$.

Розв'язування.

За визначенням модуля знайдемо нулі модулів та їх вигляд

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & \textit{якщо} \quad x \ge -1 \\ -x-1, & \textit{якщо} \quad x \prec -1. \end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, & \textit{якщо} \quad x \ge -2 \\ -x-2, & \textit{якщо} \quad x \prec -2. \end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases} x+3, & \textit{якщо} \quad x \ge -3 \\ -x-3, & \textit{якщо} \quad x \prec -3. \end{cases}$$

Наносимо на числову вісь нулі модулів та їх вигляд

$-x-1$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$
$-x-2$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$

-3 -2 -1

Для кожного інтервалу слід записати задане рівняння та розв'язати його

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|=2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-3) \\ -x-1-x-2-x-3=2{,}5, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x\in[-3;-2) \\ -x-1-x-2+x+3=2{,}5, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x\in[-2;-1) \\ -x-1+x+2+x+3=2{,}5, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x\in[-1;\infty) \\ x+1+x+2+x+3=2{,}5. \end{cases} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-3) \\ x=-17/6, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x\in[-3;-2) \\ x=-2{,}5, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x\in[-2;-1) \\ x=-1{,}5, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x\in[-1;\infty) \\ x=-7{,}6. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ \\ x=-2{,}5, \\ \\ x=-1{,}5, \\ \\ x\in\varnothing. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2{,}5, \\ \\ x=-1{,}5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-2{,}5; -1{,}5\}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left|x^2-5x+6\right|=3x-1$.

Розв'язування.

За визначенням модуля знайдемо нулі модуля та його вигляд

$$\left|x^2-5x+6\right|=\begin{cases} x^2-5x+6, & \textit{якщо} \quad x^2-5x+6\ge 0, \\ -x^2+5x-6, & \textit{якщо} \quad x^2-5x+6<0, \end{cases}$$

або

$$\left|x^2-5x+6\right|=\begin{cases} x^2-5x+6, & \textit{якщо} \quad x\in(-\infty;2)\bigcup[3;\infty), \\ -x^2+5x-6, & \textit{якщо} \quad x\in[2;3). \end{cases}$$

Позначимо на числовій осі нулі модуля та його вигляд

$$\underset{}{x^2-5x+6} \;\Big|_{2}\; -x^2+5x-6 \;\Big|_{3}\; x^2-5x+6$$

Для кожного інтервалу слід записати задане рівняння та розв'язати його. Маємо

$$\left|x^2-5x+6\right|=3x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;2)\bigcup[3;\infty) \\ x^2-5x+6=3x-1, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[2;3) \\ -x^2+5x-6=3x-1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;2)\bigcup[3;\infty) \\ x^2-8x+7=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[2;3) \\ -x^2+2x-5=0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;2)\bigcup[3;\infty) \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=7, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [2;3) \\ x \in \varnothing. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=7. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1;7\}$.

Приклад 3. Визначити кількість розв'язків рівняння $\left||x+2|-1\right|=a$ для усіх значень параметра a .

Розв'язання.

За означенням модуля знайдемо нулі внутрішнього модуля та його вигляд

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \textit{якщо} \quad x \ge -2 \\ -x-2, & \textit{якщо} \quad x < -2. \end{cases}$$

Тоді ліву частину рівняння можна представити у вигляді:

$$\left||x+2|-1\right| = \begin{cases} |x+2-1|, & \textit{якщо} \quad x \ge -2 \\ |-x-2-1|, & \textit{якщо} \quad x < -2. \end{cases}$$

Таким чином, початкове рівняння буде мати вигляд

$$\left||x+2|-1\right| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |-x-3| = a, \\ x \in (-\infty;-2), \end{cases} \\ \\ \begin{cases} |x+1| = a, \\ x \in [-2;\infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Для знаходження розв'язку рівняння скористаємося графічним способом, а саме побудуємо графіки функцій правої та лівої частин.
Маємо

$$\left||x+2|-1\right|=a \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=|-x-3| \\ y=a \\ x\in(-\infty;-2), \end{cases} \\ \begin{cases} y=|x+1| \\ y=a \\ x\in[-2;\infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Якщо детально з'ясувати вигляд модулів, що стоять у правій частині, то отримаємо:

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{якщо} \quad x\geq -1 \\ -x-1, & \text{якщо} \quad x<-1. \end{cases} \qquad |-x-3|=\begin{cases} -x-3, & \text{якщо} \quad x\leq -3 \\ x+3, & \text{якщо} \quad x>-3. \end{cases}$$

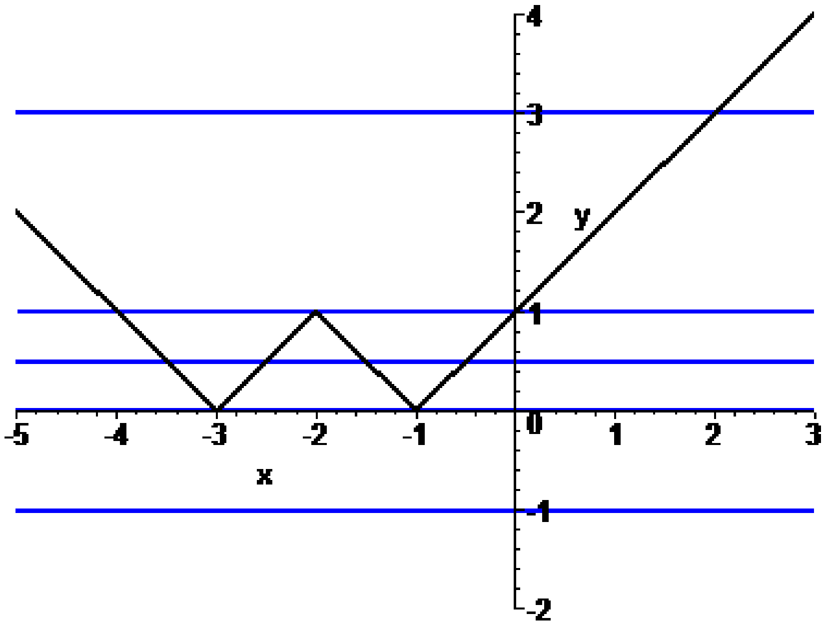
Отже, необхідно побудувати чотири прямих лінії, що визначаються наступними умовами:

$$\left||x+2|-1\right|=a \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=|-x-3| \\ y=a \\ x\in(-\infty;-2), \end{cases} \\ \begin{cases} y=|x+1| \\ y=a \\ x\in[-2;\infty). \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-x-3, \\ x\in(-\infty;-3), \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+3, \\ x\in[-3;\infty), \end{cases} \end{array}\right. \\ y=a, \\ x\in(-\infty;-2), \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x+1, \\ x\in[-1;\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} y=-x-1, \\ x\in(-\infty;-1), \end{cases} \end{array}\right. \\ y=a, \\ x\in[-2;\infty). \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

Таким чином, отримали чотири випадки

$$\begin{cases} y=-x-3, \\ y=a, \\ x\in(-\infty;-3), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y=x+3, \\ y=a, \\ x\in[-3;-2), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y=-x-1, \\ y=a, \\ x\in[-2;-1), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y=x+1, \\ y=a, \\ x\in[-1;\infty). \end{cases}$$

На рисунку представлено шуканий графік функції $y = || x+2| + 1|$ та прямі $y = a$.



Пряма $y = a$ паралельна осі *OX*. Маємо

1. при $a \in (-\infty;0)$ пряма $y = a$ не перетинає графік і рівняння не має розв'язків;
2. при $a = 0$ точок перетину дві;
3. при $a \in (0;1)$ точок перетину чотири;
4. при $a = 1$ точок перетину три;
5. при $a \in (1;\infty)$ точок перетину дві.

Відповідь:

рівняння не має жодного розв'язку при $a \in (-\infty;0)$;

рівняння має два розв'язки при $a = 0$ і $a \in (1;\infty)$;

рівняння має три розв'язки при $a = 1$;

рівняння має чотири розв'язки при $a \in (0;1)$.