

Міністерство освіти і науки України  
Комунальний заклад «Технічний ліцей м. Дніпродзержинська»

# **ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ**

**ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ**

за темою «*Границя функції. Неперервність*»

Дніпродзержинськ  
2016

---

## Тема 1: Границя функції та її властивості

### 1.1. Розкриття невизначеності $\{\infty/\infty\}$ .

**Завдання 1.** Обчислити границі функції:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x - 4)$ ;    2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 7}$ ;    3)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3+x}{x-4}$ ;    4)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-x}{25-x^2}$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5+x^2}{3x-1}$ ;    6)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8x^2 + 1}{x+3}$ ;    7)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+4}}$ ;
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-3x^2}{2x-1}$ ;    9)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x+3}{3x-x^2}$ ;    10)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-7x}{4+x^2}$ ;
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{3x-6}{\sin(\pi x)}$ ;    12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}+5}{\cos 3x}$ ;    13)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 3x}{x \cdot \operatorname{tg} x}$ ;
- 14)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 + \cos 2x}$ ;    15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x^2 - x - 1}{x - 3} - 2 \right)$ ;    16)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{2x}{x^3 - 1} \right)$ .

**Завдання 2.** Обчислити границі:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{4-x}$ ;    2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-4}{3+x}$ ;    3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+4x}{2x-5}$ ;    4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-2x}{7+8x}$ .

**Завдання 3.** Обчислити границі:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 6x + 7}{5x^2 - 9}$ ;    2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 5x^2 - 7}{2x^2 + x}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{1 - 2x^2}$ ;    4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 5x^2}{3 + 2x - x^2}$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 5}{4x^3 + x^2 - 3}$ ;    6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3x^3 - x^2}{1 + 3x + 6x^3}$ ;
- 7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 16x - 8}{5 + 10x + 7x^3}$ ;    8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 6}{1 + 2x^3}$ .
-

Завдання 4. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+5x^5}{x^4-12x+1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7-2x^8+11}{5x^7+3x+2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6+6x^5-x^2+5}{3x^4-4x^3+1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^6-3x^2}{3x^4-5x+2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-11x^2+3}{5x-3x^5};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-x+5}{1+3x^2+x^6};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+10x^5-3}{2x^7-10x^3+7};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x^5}.$$

Завдання 5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{8x^4-x+4}}{3-2x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x-27x^3+3x^2}}{1+4x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+4x-2}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2-7x}{\sqrt[3]{5x^6-3x^2+x+4}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x^6+2}}{1+4x+6x^6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4+x^2+x}{\sqrt{-2+3x+x^4}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x^6+14}{\sqrt{2x^4+5x+8}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{6x^9-4x^2+x}}{2x-5x^5+3}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+3x^2-4}{\sqrt{9x^6+4x}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8+3x+4}}{3x^4-2}$$

## 1.2. Розкриття невизначеності $\{0/0\}$ .

Завдання 6. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3x^2-8x-3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2-72}{x^2-7x+6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{2x^2+9x+9};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - x - 2x^2}{3x^2 - 2x - 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{21 + 5x - 4x^2}{2x^2 - 3x - 9};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 + x - 6};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + 5x + 2}.$$

**Завдання 7.** Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{2x^2 - 3x - 27}.$$

**Завдання 8.** Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{(x^2 + 2x - 3)^2}.$$

**Завдання 9.** Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 7} - 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x^2 - 9};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x + 5} - 3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^3 + 4x^2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{4x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}.$$

**Завдання 10.** Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x+10} - 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{4 - \sqrt{2x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{5-x} - 2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{x^2+4}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+25} - 5}{4 - \sqrt{x^2+16}}.$$

**Завдання 11.** Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{2 - \sqrt[3]{8+3x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x^2 - 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

### 1.3. Розкриття невизначеності $\{\infty - \infty\}$ .

**Завдання 12.** Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{4-x^2} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{3}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} \right);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2-x-2} - \frac{1}{3x^2-6x} \right).$$

Завдання 13. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} - 2x \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x - 3} - x \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} \right);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x - \frac{2x^3 - 5x}{x^2 - 2} \right).$$

Завдання 14. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x(x-1)});$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 2});$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x});$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 3});$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1});$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x^2 - 3});$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{4 - x^3});$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 5}) \cdot x.$$

### 1.3. Перша визначна границя

Завдання 15. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 \arcsin 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 3x);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 8x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{\sin 2x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{10x^2}.$$

Завдання 16. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \sin 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{6x \cdot \sin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 3x}{1 - \cos 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/4)}{1 - \cos 5x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \cdot \operatorname{tg} 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - 1}{3x \cdot \sin x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\cos 2x \cdot \operatorname{arctg} 5x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\cos 2x \cdot \operatorname{tg} 4x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\cos 7x - 1};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x \cdot \sin 3x}{\cos 2x - 1}.$$

Завдання 17. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{4x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 5x - \sin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos x}{\sin x \cdot \operatorname{tg} 3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\sin 2x + \sin 6x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{2x \cdot \operatorname{tg} x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{x \cdot (\cos x + \cos 5x)};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos x \cdot \operatorname{tg} 6x}.$$

Завдання 18. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2 \cdot \sin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos 2x)}{\operatorname{tg} x - \sin x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^2 4x}{3x \cdot \sin 6x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x \cdot \operatorname{tg} 8x}{\cos^3 3x - \cos 3x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}.$$

Завдання 19. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 7x}{\sin 4x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5\pi/2) \cdot \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos^3 x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \sqrt{\cos x}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\arcsin(3x^2)}.$$

Завдання 20. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2(x/2)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sqrt{4+x} - 2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - \sin 2x} - 2}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

Завдання 21. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\pi - 4x)^2}{1 - \sin 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{\cos 5x - \cos 3x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$$



## 1.4. Неперервність функції в точці. Точки розриву

**Завдання 22.** Дослідити на неперервність задану функцію:

$$1) f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-2};$$

$$3) f(x) = 2 + \frac{1}{1-x};$$

$$4) f(x) = \frac{2}{3x-1} + 1;$$

$$5) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1};$$

$$6) f(x) = \frac{2x-4}{x^2+x-6};$$

$$7) f(x) = \frac{|x+2|}{x+2};$$

$$8) f(x) = \frac{x^2-6x+8}{|x-2|};$$

$$9) f(x) = 5^{\frac{1}{x+3}};$$

$$10) f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}}.$$

**Завдання 23.** Дослідити на неперервність задану функцію та побудувати її графік:

$$1) f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1, \\ x+2, & x > 1. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x < 2, \\ -1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1; \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2; \\ 1-x, & x > 2. \end{cases}$$

**Завдання 24.** Дослідити на неперервність задану функцію та побудувати схематично її графік:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1; \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1; \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1; \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2; \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ -\cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2; \\ \pi/2 + x, & x > \pi/2. \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1; \\ 1/2, & -1 < x \leq \pi/6; \\ \sin x, & x > \pi/6. \end{cases} \quad 8) f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4; \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$$

### Приклад розв'язування індивідуального завдання № 1

► 1) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 1}{2 + 3x - 2x^2}$ .

Якщо  $x \rightarrow \infty$ , то маємо невизначеність  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ , тому обчислення границі необхідно чисельник та знаменник поділити на найбільший степінь  $x$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 1}{2 + 3x - 2x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left( 1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \cdot \left( \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2} = \frac{1 - 0 - 0}{0 + 0 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 1}{2 + 3x - 2x^2} = -\frac{1}{2} = -0,5$ .

► 2) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{2x^3 + 3x + 1}$ .

Аналогічно попередньому, маємо невизначеність  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ , отже

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{2x^3 + 3x + 1} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{2x^3 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x^3 \cdot \left( 2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 0 \cdot \frac{1 + 0}{2 + 0 + 0} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{2x^3 + 3x + 1} = 0$

► 3) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{5x^2 - x + 2}}$ .

Маємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{5x^2 - x + 2}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left( 2 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x^2 \cdot \left( 5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left( 2 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \cdot \sqrt{\left( 5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{\left(5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt{5-0+0}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{5x^2-x+2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

► 4) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-x-6}.$

Маємо невизначеність  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ , оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-x-6} = \left\{\frac{4+2-6}{8-2-6}\right\} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для розкриття невизначеності, розкладаємо квадратні тричлени чисельника та знаменника дробу на множники:

$$x^2+x-6 = (x-2)(x-3); \quad 2x^2-x-6 = 2(x-2)(x+3/2).$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-x-6} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{2(x-2)(x+3/2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{2x+3} = \frac{2+3}{4+3} = \frac{5}{7};$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{2x^2-x-6} = \frac{5}{7}.$

► 5) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+4x+2}{x^3+2x^2-1}.$

Маємо невизначеність  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ , тому що

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+4x+2}{x^3+2x^2-1} = \left\{\frac{-1+3-4+2}{-1+2-1}\right\} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Оскільки чисельник та знаменник дорівнюють нулю при  $x = -1$ , то число  $x = -1$  є коренем многочленів чисельника та знаменника, тобто ці многочлени діляться націло на двочлен  $x + 1$ . Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники, скориставшись схемою Горнера:

		1		3		4		2	
-1		1		2		2		0	

		1		2		0		-1	
-1		1		1		-1		0	

Отже,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 - 1} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 2x + 2)}{(x+1)(x^2 + x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x - 1} = \frac{1 - 2 + 2}{1 - 1 - 1} = -1.\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 - 1} = -1.$

► 6) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}}{x^2 - 3x + 2}.$

Маємо  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}}{x^2 - 3x + 2} = \left\{ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1 - 3 + 2} \right\} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}.$  Оскільки чисельник містить ірраціональність, то для розкриття невизначеності помножимо чисельник та знаменник дробу на спряжене до чисельника:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}}{x^2 - 3x + 2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})}{(x^2 - 3x + 2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3x-1})^2}{(x^2 - 3x + 2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1 - (3x-1)}{(x-1)(x-2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+2}{(x-1)(x-2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x-2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})} = \frac{-2}{-1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

► 7) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{4+x} - 2}.$

Маємо невизначеність  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}.$  Для розкриття невизначеності помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз, спряжений до знаменника, а саме:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{4+x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 3x) \cdot (\sqrt{4+x} + 2)}{(\sqrt{4+x} - 2) \cdot (\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 3x) \cdot (\sqrt{4+x} + 2)}{(\sqrt{4+x})^2 - 2^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3) \cdot (\sqrt{4+x} + 2)}{4+x-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3) \cdot (\sqrt{4+x} + 2)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+3) \cdot (\sqrt{4+x} + 2) = 3 \cdot (2+2) = 12. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{4+x} - 2} = 12.$

► 8) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$

Маємо невизначеність  $\{\infty - \infty\}$ . Для розкриття невизначеності доповнюємо вираз під знаком границі до різниці квадратів, а саме:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \left\{ \frac{1}{+\infty} \right\} = 0. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0.$

► 9) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{5x}.$

Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{5x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{13 \cdot \sin 13x}{5 \cdot 13x} = \frac{13}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{13x} = \frac{13}{5} \cdot 1 = \frac{13}{5} = 2,6.$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{5x} = 2,6.$

► 10) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\operatorname{tg} 3x}.$

Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\operatorname{tg} 3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin 7x}{7x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \frac{7x}{3x} \right) =$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{7x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{7}{3}.$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{7}{3}.$

► 11) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \cdot \sin 6x}.$

Для перетворення чисельника дробу скористаємося формулою тригонометрії перетворення суми у добуток, а саме

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \cdot \sin 6x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x}{x \cdot \sin 6x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \frac{2x}{6x} \right) = \\ &= -\frac{4}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin 6x} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \cdot \sin 6x} = -\frac{2}{3}.$

► 12) Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x \cdot \cos 10x}{1 - \cos 5x}.$

Маємо  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x \cdot \cos 10x}{1 - \cos 5x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ , тому для спрощення знаменника використовуємо формулу зниження степеня, а саме

$$1 - \cos \alpha = 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x \cdot \cos 10x}{1 - \cos 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x \cdot \cos 10x}{2 \cdot \sin^2(5x/2)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2x} \cdot \cos 10x \cdot \frac{(5x/2)^2}{\sin^2(5x/2)} \cdot \frac{2x}{(5x/2)^2} \right) = \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 10x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x/2)^2}{\sin^2(5x/2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(5x/2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 4}{25x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{25x} = \left\{ \frac{8}{0} \right\} = +\infty. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x \cdot \cos 10x}{1 - \cos 5x} = +\infty.$